

فصل سوم

توابع متعالی

هر تابعی که چندجمله‌ای باشد و یا از جمع و تفریق و ضرب و تقسیم و ترکیب و ریشه گرفتن و به توان رساندن چند جمله‌ای‌ها ایجاد شود را تابع جبری می‌نامیم و هر تابعی که جبری نباشد را غیر جبری یا متعالی می‌گوییم به طور مثال توابع مثلثاتی و معکوس آن‌ها از جمله توابع متعالی می‌باشند.

در این فصل چند تابع متعالی دیگر نیز معرفی خواهد شد که در بحث اصلی حل انتگرال (فصل روش‌های انتگرال‌گیری) از آن‌ها استفاده می‌شود، مانند تابع لگاریتمی و تابع نمایی و ...

از آنجا که برخی از توابع مطرح شده معکوس برخی دیگر می‌باشند، برای جلوگیری از کارهای موازی و بحث‌های تکراری، ابتدا در قالب چهار قضیه، خواصی از توابع معکوس را بررسی می‌کنیم و بیشتر در سدد این موضوع هستیم که یادآوری شود کدامیک از خواص تابع به معکوس آن مستقیماً منتقل می‌شود، به طور مثال با دانستن اینکه تابع لگاریتم طبیعی اکیداً صعودی است در می‌یابیم که تابع معکوس آن نیز چنین خواهد بود.

قضایای تابع معکوس

۱. تابع $f: A \rightarrow B$ معکوس‌پذیر است اگر و تنها اگر یک به یک و پوشا باشد.
۲. وارون هر تابع اکیداً یکنوا، اکیداً یکنواست.
- اگر f اکیداً صعودی باشد آنگاه f^{-1} نیز اکیداً صعودی است و به طور مشابه اگر f اکیداً نزولی باشد، f^{-1} نیز اکیداً نزولی است.

۳. اگر $f: [a, b] \rightarrow [c, d]$ یک تابع وارون‌پذیر و پیوسته باشد، آنگاه $f^{-1}: [c, d] \rightarrow [a, b]$ پیوسته است.

۴. اگر تابع وارون‌پذیر f در یک همسایگی نقطه $x = c$ پیوسته و در این نقطه مشتق‌پذیر و $f'(c) \neq 0$ باشد، آنگاه f^{-1} در نقطه $x = f(c)$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$$

توضیح: به کمک این قضیه که قضیه مشتق تابع معکوس نامیده می‌شود بدون محاسبه تابع f^{-1} و تنها به کمک مشتق f یعنی f' ، از تابع f^{-1} مشتق می‌گیریم.

مثال: اگر $f(x) = x^2 + 2x + 1$ برای $x \geq -1$ باشد، مطلوب است $(f^{-1})'(9)$:

الف: به کمک قضیه مشتق تابع معکوس

ب: بدون کمک قضیه فوق

حل:

الف:

$$f(c) = 9 \Rightarrow c = ?$$

$$c^2 + 2c + 1 = 9 \Rightarrow c^2 + 2c - 8 = 0 \Rightarrow (c + 4)(c - 2) = 0$$

$$\Rightarrow c = -4, \quad c = 2 \xrightarrow{c \geq -1} c = 2 \Rightarrow (f^{-1})'(9) = \frac{1}{f'(2)}$$

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2x + 2$$

$$\Rightarrow f'(2) = 2 \times 2 + 2 = 6$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(9) = \frac{1}{6}$$

ب: بدون کمک قضیه مشتق تابع معکوس، اول باید ضابطه f^{-1} را محاسبه کرده و سپس از آن مشتق بگیریم.

$$y = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \Rightarrow x + 1 = \pm \sqrt{y} \Rightarrow x = \pm \sqrt{y} - 1$$

$$\xrightarrow{x \geq -1} x = \sqrt{y} - 1 \Rightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{y} - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 1 \Rightarrow$$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow (f^{-1})'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$$

مثال: اگر $f(x) = x^8 + 3x^4 + 2x^2 + 1$ باشد،

الف: ثابت کنید f بر بازه $[0, +\infty)$ وارون‌پذیر است.

ب: $(f^{-1})'(7)$ را محاسبه کنید.

حل: الف:

$$f'(x) = 8x^7 + 12x^3 + 4x = 4x(2x^6 + 3x^2 + 1)$$

$$\left. \begin{array}{l} x > 0 \\ 2x^6 + 3x^2 + 1 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f' > 0$$

$f' > 0$ بر بازه $(0, +\infty)$ پس f اکیداً صعودی بر بازه $[0, +\infty)$ و در نتیجه f یک به یک، پس وارون پذیر است.

ب: به کمک قضیه مشتق تابع معکوس

$$(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$$

$$f(c) = 7 \Rightarrow c^8 + 3c^4 + 2c^2 + 1 = 7 \xrightarrow{c \geq 0} c = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(7) = \frac{1}{f'(1)}$$

$$f'(1) = 8 + 12 + 4 = 24 \Rightarrow (f^{-1})'(7) = \frac{1}{24}$$

مثال: اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-5}$ و p نقطه‌ای به طول 2 باشد، معادله خط مماس بر منحنی f^{-1} را در نقطه p تعیین کنید.

$$(f^{-1})'(f(c)) = \frac{1}{f'(c)}$$

$$f(c) = 2 \Rightarrow \frac{c+1}{c-5} = 2 \Rightarrow c+1 = 2c-10 \Rightarrow c = 11$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x-5} \Rightarrow f'(x) = \frac{(x-5)-(x+1)}{(x-5)^2} = \frac{-6}{(x-5)^2}$$

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(11)}$$

$$f'(11) = \frac{-6}{(x-5)^2} \Big|_{x=11} = \frac{-6}{(11-5)^2} = \frac{-1}{6} \Rightarrow (f^{-1})'(2) = \frac{1}{-1/6} = -6$$

از طرفی $2 \xrightarrow{f} 11$ پس، معادله خط مماس بر نمودار تابع f^{-1} در نقطه $P(2, 11)$ عبارت است از،

$$y - 11 = -6(x - 2) \Rightarrow y = -6x + 23$$

تابع لگاریتم طبیعی

تعریف: تابع لگاریتم طبیعی

برای هر $x > 0$ مقدار $\int_1^x \frac{dt}{t}$ را لگاریتم طبیعی x می‌نامیم و با نماد $\ln(x)$ آن را نشان می‌دهیم، بنابراین تابع زیر را تابع لگاریتم طبیعی می‌نامیم.

$$\ln : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

خواص تابع لگاریتم طبیعی

(۱) دامنه تعریف این تابع فقط شامل اعداد مثبت است.

$$D_{\ln} = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$$

مثال: دامنه تعریف تابع $y = \ln(\sqrt{x-4} - \sqrt{6-x})$ را تعیین کنید.

حل:

$$D_y = \{x \in \mathbb{R} \mid x-4 \geq 0 \text{ و } 6-x \geq 0 \text{ و } \sqrt{x-4} - \sqrt{6-x} > 0\}$$

$$x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$$

$$6-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 6$$

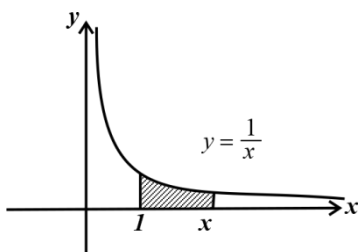
$$\sqrt{x-4} - \sqrt{6-x} > 0 \Rightarrow \sqrt{x-4} > \sqrt{6-x}$$

چون هر دو طرف نامساوی فوق، مثبت است بدون تغییر در جهت نامساوی، طرفین را به توان دو می‌رسانیم،

$$x-4 > 6-x \Rightarrow x > 5$$

$$\Rightarrow D_y = (5, 6]$$

$$\ln(x) = \begin{cases} + & x > 1 \\ - & 0 < x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases} \quad (۲)$$



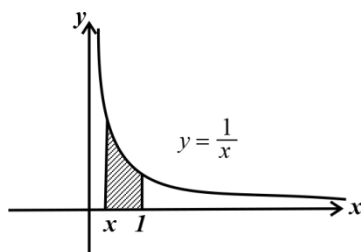
اگر $x > 1$ باشد داریم، $\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$

و طبق نمودار روبرو لگاریتم طبیعی x برابر است با مساحت ناحیه هاشورزده، پس مثبت است.

و اگر $x = 1$ باشد داریم، $Ln(1) = \int_1^1 \frac{dt}{t} = 0$.

و اگر $0 < x < 1$ پس $Ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t} = -\int_x^1 \frac{dt}{t}$

یعنی مطابق شکل زیر در این حالت لگاریتم طبیعی x قرینه مساحت ناحیه هاشورزده در زیر می باشد پس منفی است.



$$(Ln(x))' = \frac{1}{x} \quad (۳)$$

$$(Ln(x))' = \left(\int_1^x \frac{dt}{t}\right)' = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow (Ln(u))' = \frac{1}{u} \times u' = \frac{u'}{u}$$

بنابرقضیه اساسی اول حسابان

مثال:

$$(Ln(\sin(x)))' = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \cot g(x)$$

$$(Ln(tg(x)))' = \frac{\sec^2(x)}{tg(x)} = \frac{\frac{1}{\cos^2(x)}}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}} = \frac{1}{\sin(x) \cos(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{Ln(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 1$$

همچنین از آنجا که $(Ln(x))' = \frac{1}{x}$ پس به شرط $0 < x$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + K$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{\ln(ax+b)}{a} + K$$

مثال: مطلوب است انتگرال‌های زیر،

$$\int \frac{dx}{x-2}, \quad \int \frac{2x+3}{6x-1} dx$$

حل:

$$\int \frac{dx}{x-2} = \ln(x-2) + K$$

$$\frac{2x+3}{6x-1} = \frac{1}{3} + \frac{\frac{10}{3}}{6x-1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{2x+3}{6x-1} dx &= \int \left(\frac{1}{3} + \frac{\frac{10}{3}}{6x-1} \right) dx = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3} \frac{\ln(6x-1)}{6} + K \\ &= \frac{x}{3} + \frac{5}{9} \ln(6x-1) + K \end{aligned}$$

(۴)

$$\forall_{x,y>0} : \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$$

$$\forall_{x,y>0} : \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\forall_{x>0} : \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$$

مثال: با داشتن $\ln(2)$ و $\ln(3)$ مطلوب است مقادیر زیر،

$$\ln(0.75), \quad \ln(\sqrt[3]{9}), \quad \ln(\sqrt{13.5})$$

حل:

$$\ln(0.75) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln\left(\frac{3}{2^2}\right) = \ln(3) - 2\ln(2)$$

$$\ln(\sqrt[3]{9}) = \ln(\sqrt[3]{3^2}) = \ln(3^{\frac{2}{3}}) = \frac{2}{3} \ln(3)$$

$$\begin{aligned} \ln(\sqrt{13.5}) &= \ln\left(\sqrt{\frac{27}{2}}\right) = \ln\left(\sqrt{\frac{3^3}{2}}\right) = \ln\left(\frac{3^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{1}{2}}}\right) \\ &= \frac{3}{2}\ln(3) - \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{3\ln(3) - \ln(2)}{2} \end{aligned}$$

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$\ln(x^3) - \ln(x) = \frac{\ln(32) - \ln(8)}{2}$$

حل: با توجه به دامنه تابع $\ln$ و وجود عبارت‌های $\ln(x^3)$ و $\ln(x)$ در صورت معادله فوق، شرط می‌کنیم که $x > 0$ باشد.

$$\ln(x^3) - \ln(x) = \ln\left(\frac{x^3}{x}\right) = \ln(x^2)$$

$$\frac{\ln(32) - \ln(8)}{2} = \frac{\ln\left(\frac{32}{8}\right)}{2} = \frac{\ln(4)}{2} = \ln(\sqrt{4}) = \ln(2)$$

با مساوی قرار دادن سمت راست و سمت چپ معادله

$$\ln(x^3) - \ln(x) = \frac{\ln(2) - \ln(8)}{2}$$

داریم:

$$\ln(x^2) = \ln(2) \quad (*)$$

از طرفی

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}, \quad x > 0 \Rightarrow \ln \text{ تابعی اکیداً صعودی است}$$

$\ln$ تابعی یک به یک است بنابراین

$$(*) \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \xrightarrow{x>0} x = \sqrt{2}$$

$$\text{مثال: } \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \sin^2(x) dx = ?$$

حل: چون تابع $\sin^2(x)$ تابعی زوج است و بازه انتگرال بالا $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ بازه‌ای متقارن،

کافی است ثابت کنیم تابع $y = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ تابعی فرد می‌باشد و در این صورت جواب

انتگرال برابر صفر می شود (زیرا حاصل ضرب یک تابع فرد در یک تابع زوج، تابعی فرد خواهد بود).

برای اثبات فرد بودن تابع $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ابتدا باید ثابت کنیم دامنه تابع متقارن است.

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1+x}{1-x} > 0 \right\}$$

	x	$-\infty$	-1	1	∞
$1+x = 0 \Rightarrow x = -1$	$1+x$	-	0	+	+
$1-x = 0 \Rightarrow x = 1$	$1-x$	+		0	-
	$\frac{1+x}{1-x}$	-	0	+	-
				تعریف نشده	

$$\Rightarrow D_f = (-1, 1)$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= \ln\left(\frac{1+(-x)}{1-(-x)}\right) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right) \\ &= \ln\left(\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1}\right) = -\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = -f(x) \end{aligned}$$

پس f تابعی فرد می باشد و جواب انتگرال صفر است.

مثال: به کمک قضیه مقدار میانگین (برای مشتق) برقراری نامساوی زیر را ثابت کنید.

$$\forall_{a,b} : b > a > 0 : \frac{b-a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a}$$

حل:

اگر قرار دهیم $f(x) = \ln(x)$ ، رابطه بالا معادل است با

$$\frac{b-a}{b} < f(b) - f(a) < \frac{b-a}{a} \equiv \frac{1}{b} < \frac{f(b) - f(a)}{b-a} < \frac{1}{a}$$

بنابر قضیه مقدار میانگین (در کاربرد مشتق) اگر f بر بازه $[a, b]$ پیوسته و بر بازه (a, b) مشتق پذیر باشد،

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c)$$

که در آن c نقطه ای بین a تا b می باشد.

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(c) = \frac{1}{c}$$

و $a < c < b$ پس $\frac{1}{a} > \frac{1}{c} > \frac{1}{b}$ یعنی

$$\frac{1}{b} < \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a} < \frac{1}{a} \equiv \frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$$

و رابطه فوق برقرار است.

مثال: تعیین کنید آیا توابعی با ضابطه‌های زیر برابرند.

$$y_1 = \ln(x^2) \quad , \quad y_2 = 2\ln(x)$$

حل:

$$D_{y_1} = R - \{0\} \quad , \quad D_{y_2} = R^+ \Rightarrow D_{y_1} \neq D_{y_2}$$

دو تابع وقتی برابرند که دامنه‌های آن‌ها یکی باشد و ضابطه‌ها برابر باشند در این مثال دامنه دو تابع یکی نیست پس توابع برابر نیستند.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \quad (۵)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0 \quad , \quad \alpha > 0 \quad \text{مثال: برای هر}$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(x+1) - \ln(x))'}{\frac{-1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$$

مثال: نامساوی‌های زیر را ثابت کنید.

$$\forall \alpha > 0 : \ln(x) \leq \frac{1}{\alpha} x^\alpha$$

$$\frac{\ln(x)}{x} < \frac{2}{\sqrt{x}}$$

حل: نامساوی اول به عنوان تمرین و نامساوی دوم، همان نامساوی اول به ازای $\alpha = \frac{1}{2}$ می‌باشد،

$$\alpha = \frac{1}{2} : \ln(x) \leq \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x} \Rightarrow \ln(x) \leq 2\sqrt{x} \Rightarrow \frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

۶) رسم دقیق نمودار تابع $y = \ln(x)$

برای رسم دقیق نمودار تابع مراحل زیر را طی می‌کنیم:

الف: یافتن دامنه تابع و نقاط برخورد با محورهای مختصات

$D_y = (0, +\infty)$ و از اینکه $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ و پیوسته است

پس برد f همه اعداد حقیقی را در بر می‌گیرد یعنی $R_f = (-\infty, +\infty) = R$

$$x = 0 \notin D_f$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 1$$

ب: بحث زوج یا فرد بودن تابع

دامنه تابع متقارن نیست و فقط اعداد مثبت را شامل است پس زوج یا فرد بودن برای این تابع مطرح نیست.

ج: یافتن مجانب‌های نمودار تابع در صورت وجود

خط $x = 0$ یا محور y ها مجانب قائم نمودار است. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \Rightarrow$

پس مجانب افقی ندارد. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \Rightarrow$

اگر خط $y = ax + b$ مجانب مایل نمودار تابع باشد،

مجانب مایل ندارد. $a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \Rightarrow a = 0 \Rightarrow$

د: تعیین بازه‌های صعودی و نزولی و نقاط بحرانی و نقاط اکسترموم نسبی نمودار تابع در صورت وجود به کمک جدول تغییرات تابع

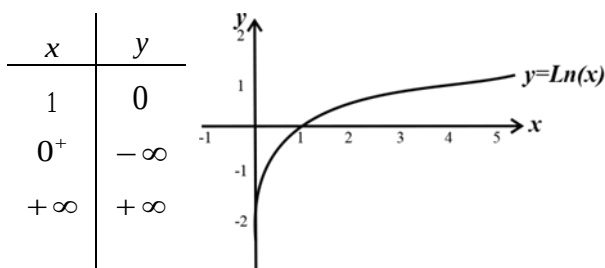
	x	0	$+\infty$
$y' = \frac{1}{x} \Rightarrow$	y'		$+$
	y		صعودی

تابع اکیداً صعودی است و نقطه بحرانی و در نتیجه نقطه اکسترموم نسبی ندارد.

ه: تعیین جهت گودی منحنی و نقاط عطف در صورت وجود

$$y'' = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \begin{array}{c|cc} x & 0 & +\infty \\ \hline y'' & & - \\ \hline y & & \cap \end{array}$$

نقطه عطف ندارد و جهت گودی منحنی همواره رو به سمت پایین است.
و سپس به کمک جدول زیر و اطلاعات بالا نمودار را رسم کنیم.



چند نکته:

(۱) مثال: اگر $y = \text{Ln}|x|$ باشد مطلوب است y' .

حل:

$$D_y = R - \{0\}, \quad |x| = \sqrt{x^2} \Rightarrow y = \text{Ln}(\sqrt{x^2})$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \text{Ln}(x^2) \Rightarrow y' = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \text{Ln}(|x|)' = \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow (\text{Ln}|u|)' = \frac{u'}{u}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x} dx = \text{Ln}|x| + K$$

(۲) مثال: به کمک خواص لگاریتم مشتق تابع زیر را تعیین کنید.

$$y = \frac{(x-1)^2 \sqrt[3]{\sin(x^2)}}{(1+2x^3)^2}$$

حل: مرحله اول: از طرفین رابطه قدر مطلق می گیریم.

$$|y| = \frac{|x-1|^2 \times |\sin(x^2)|^{\frac{1}{3}}}{|1+2x^3|^2}$$

مرحله دوم: از طرفین رابطه بالا لگاریتم می‌گیریم و خواص لگاریتم را تا جای ممکن بکار می‌بریم.

$$\ln |y| = 2\ln |x-1| + \frac{1}{3} \ln |\sin(x^2)| - 2\ln |1+2x^3|$$

مرحله سوم: از طرفین رابطه اخیر مشتق می‌گیریم و سپس y' را به کمک این رابطه محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{y'}{y} = 2 \times \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3} \times \frac{\cos(x^2) \times 2x}{\sin(x^2)} - 2 \frac{6x^2}{1+2x^3}$$

$$\Rightarrow y' = \left(\frac{2}{x-1} + \frac{2}{3} x \cot(x^2) - \frac{12x^2}{1+2x^3} \right) y$$

روش فوق را مشتق‌گیری لگاریتمی می‌نامیم.

(۳) مثال: انتگرال‌های زیر را حل کنید.

$$\int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx$$

اگر قرار دهیم $u = \cos(x)$ داریم $du = -\sin(x) dx$

$$\Rightarrow I = -\int -\frac{\sin(x) dx}{\cos(x)} = -\int \frac{du}{u} = -\ln |u| = -\ln |\cos(x)|$$

$$= \ln \left| \frac{1}{\cos(x)} \right| = \ln |\sec(x)| + K \Rightarrow \int \tan(x) dx = \ln |\sec(x)| + K$$

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})}$$

$$1 + \sqrt{x} = u \Rightarrow du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow I = 2 \int \frac{dx}{2\sqrt{x}(1 + \sqrt{x})} = 2 \int \frac{du}{u} = 2\ln |u|$$

$$= 2\ln |1 + \sqrt{x}| = 2\ln(1 + \sqrt{x}) + K$$

$$\int \sec(x) dx = \int \sec(x) dx \times \frac{\sec(x) + \tan(x)}{\sec(x) + \tan(x)} = \int \frac{\sec^2(x) + \sec(x)\tan(x)}{\sec(x) + \tan(x)} dx$$

اگر قرار دهیم $u = \sec(x) + \tan(x)$

$$du = (\sec(x) \operatorname{tg}(x) + \sec^2(x)) dx$$

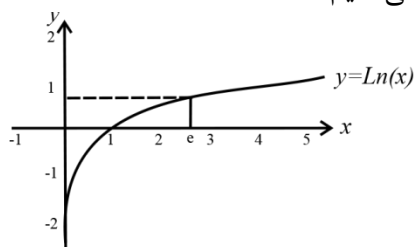
$$\Rightarrow I = \int \frac{du}{u} = \operatorname{Ln} |u| = \operatorname{Ln} |\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + K$$

$$\Rightarrow \int \sec(x) dx = \operatorname{Ln} |\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + K$$

(۴) از آنجا که قبل از این دیدیم که برد تابع لگاریتم طبیعی همه اعداد حقیقی را شامل می‌شود از جمله عدد یک، پس نقطه‌ای روی محور اعداد حقیقی وجود دارد که در آن جواب لگاریتم طبیعی برابر یک می‌شود.

تعریف: عدد نپر

نقطه‌ای روی محور که در آن جواب لگاریتم طبیعی برابر یک است را عدد نپر می‌نامیم و با نماد e آن را نشان می‌دهیم.



برای یافتن مقدار واقعی عدد e به صورت زیر می‌توان عمل کرد:

$$(\operatorname{Ln}(x))' = \frac{1}{x} \Rightarrow (\operatorname{Ln})'(1) = \frac{1}{x} \Big|_{x=1} = \frac{1}{1} = 1$$

و به کمک تعریف مشتق داریم:

$$1 = \operatorname{Ln}'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{Ln}(x) - \operatorname{Ln}(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\operatorname{Ln}(x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \operatorname{Ln}(x^{\frac{1}{x-1}})$$

چون تابع Ln پیوسته است پس جای حد و تابع را می‌توان عوض کرد یعنی

$$= \operatorname{Ln}(\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}})$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ln}(\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}}) = 1 = \operatorname{Ln}(e)$$

از طرفی تابع Ln اکیداً صعودی پس یک به یک است بنابراین

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} = e \quad (*)$$

و اگر $x \rightarrow 1$ داریم $x - 1 \rightarrow 0$ ، و با قرار دادن $x - 1 = t$ یعنی $x = 1 + t$ داریم:

$$(*) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$$

و همچنین

$$t \rightarrow 0 \equiv \frac{1}{t} \rightarrow \infty$$

پس با قرار دادن $y = \frac{1}{t}$ داریم $t = \frac{1}{y}$ و بنابر رابطه (*)

$$\lim_{y \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{y})^y = e$$

بنابراین

$$e = \lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x$$

مقدار تقریبی عدد نپر

در رابطه $e = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}}$ ، با جایگذاری مقادیر نزدیک به صفر برای t خواهیم داشت،

$$t = 1 \Rightarrow e \sim (1+1)^1 = 2$$

$$t = \frac{1}{2} \Rightarrow e \sim (1 + \frac{1}{2})^2 = \frac{9}{4} = 2.25$$

$$t = \frac{1}{100} \Rightarrow e \sim (1 + \frac{1}{100})^{100} \Rightarrow e \sim 2.7169$$

$$t = \frac{1}{1000} \Rightarrow e \sim (1 + \frac{1}{1000})^{1000} \Rightarrow e \sim 2.718$$

در محاسبات معمولاً e را به طور تقریبی معادل 2.7 در نظر می گیریم.

$$e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

همچنین ثابت می شود

مثال: جمعیت کشوری هر سال 2٪ افزایش می یابد، جمعیت این کشور بعد از یک قرن حدوداً چند برابر می شود.

حل: اگر A جمعیت اولیه این کشور باشد، مطابق فرض مسئله پس از گذشت یک سال جمعیت آن برابر است با

$$A + \%2A = A(1 + \frac{2}{100}) = A(1 + \frac{1}{50})$$

و بعد از گذشت دو سال،

$$A(1 + \frac{1}{50}) + \%2A(1 + \frac{1}{50}) = A(1 + \frac{1}{50})(1 + \%2) = A(1 + \frac{1}{50})^2$$

و به طور مشابه پس از ۱۰۰ سال می شود $A(1 + \frac{1}{50})^{100}$.

از آنجا که $e = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \frac{1}{x})^x$ پس،

$$(1 + \frac{1}{50})^{100} = \left[(1 + \frac{1}{50})^{50} \right]^2 \sim e^2 \sim 7.39$$

بنابراین جمعیت این کشور پس از گذشت یک قرن تقریباً برابر است با

$$A(1 + \frac{1}{50})^{100} \sim A \times e^2 \sim 7.39A$$

قابل توجه است که مقدار دقیق تر این ضریب تا سه رقم اعشار برابر است با،

$$(1 + \frac{1}{50})^{100} = 7.245$$

مثال: دامنه تعریف تابع زیر را تعیین کنید.

$$y_1 = \sqrt{1 - \ln(x)} \text{ و}$$

$$D_{y_1} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 - \ln(x) \geq 0, x > 0\} \quad \text{حل:}$$

$$1 - \ln(x) \geq 0 \Rightarrow \ln(x) \leq 1 \Rightarrow \ln(x) \leq \ln(e)$$

و چون $\ln$ اکیداً صعودی است پس

$$0 < x \leq e \Rightarrow D_{y_1} = (0, e]$$

تابع نمایی

تعریف: تابع نمایی

وارون تابع لگاریتم طبیعی را تابع نمایی خاص می‌نامیم و به اختصار با نماد $\exp$ آن را نشان می‌دهیم.

توضیح: تابع $\ln$ اکیداً صعودی پس یک به یک و همچنین $R_{\ln} = R$ پس پوشاست و

در نتیجه وارون پذیر است. $R \xrightarrow{\ln} R^+ \xleftarrow{\exp}$

خواص تابع نمایی

(۱)

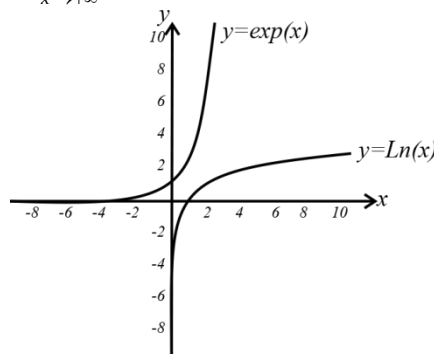
$$D_{\exp} = R_{\ln} = R, R_{\exp} = D_{\ln} = R^+ \Rightarrow \exp > 0$$

$$\ln(1) = 0 \Rightarrow \exp(0) = 1$$

$$\ln(e) = 1 \Rightarrow \exp(1) = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = +\infty$$



(۲)

$$\begin{array}{c} \ln \\ \xrightarrow{+} \\ \times \\ \leftarrow \\ \exp \end{array} \quad +: \forall x, y > 0: \ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y) \Rightarrow \exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

$$\begin{array}{c} \ln \\ \xrightarrow{-} \\ \div \\ \leftarrow \\ \exp \end{array} \quad -: \forall x, y > 0: \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \Rightarrow \exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

$$x > 0: \ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x) \Rightarrow \exp(\alpha x) = (\exp(x))^\alpha$$

(۳)

$$x > 0 : (\exp(\ln(x))) = x$$

$$\forall x : (\ln(\exp(x))) = x$$

اگر از طرفین رابطه $\ln(\exp(x)) = x$ مشتق بگیریم با استفاده از قاعده زنجیره‌ای (مشتق تابع مرکب) خواهیم داشت:

$$(\ln(\exp(x)))' = x' \Rightarrow (\ln)'(\exp(x)) \times \exp'(x) = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\exp(x)} \times \exp'(x) = 1 \Rightarrow (\exp(x))' = \exp(x)$$

$$\Rightarrow (\exp(u))' = \exp(u) \times u'$$

مثال:

$$(\exp(x^2))' = \exp(x^2) \times 2x$$

$$(\exp(\sin(x)))' = \exp(\sin(x)) \times \cos(x)$$

مثال: ثابت کنید اگر تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق پذیر و $f' = f$ باشد آنگاه f ضریب ثابتی از تابع نمایی است.

حل: باید ثابت کنیم $f = K \times \exp$ که در آن K یک ضریب ثابت است و چون $\exp \neq 0$ ثابت می‌کنیم $\frac{f}{\exp}$ تابع ثابت است.

برای این کار کافی است نشان دهیم $(\frac{f}{\exp})' = 0$.

$$(\frac{f}{\exp})' = \frac{f' \times \exp - f \times \exp'}{(\exp)^2} = \frac{f \times \exp - f \times \exp}{(\exp)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{f}{\exp} = K \Rightarrow f = K \times \exp$$

K عدد ثابت

همچنین از اینکه $(\exp)' = \exp$ داریم:

$$\int \exp(x) dx = \exp(x) + K$$

$$\int \exp(ax + b) dx = \frac{\exp(ax + b)}{a} + K$$

مثال: متوسط تابع $y = \exp(x)$ را بر بازه $[\ln(a), \ln(b)]$ تعیین کنید، هر گاه $b > a > 0$ باشد.

حل:

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \frac{\int_{Ln(a)}^{Ln(b)} \exp(x) dx}{Ln(b) - Ln(a)} = \frac{\exp(x) \Big|_{Ln(a)}^{Ln(b)}}{Ln\left(\frac{b}{a}\right)} \\ &= \frac{\exp(Ln(b)) - \exp(Ln(a))}{Ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{b - a}{Ln\left(\frac{b}{a}\right)}\end{aligned}$$

و همچنین از اینکه برای هر $x > 0$ ، $\exp \circ Ln(x) = x$ داریم:

$$\exp \circ Ln(e^x) = e^x \Rightarrow \exp(x Ln(e)) = e^x \Rightarrow \exp(x) = e^x$$

به عبارت ساده‌تر تابع نمایی، تابعی است با دستور زیر:

$$\exp: R \rightarrow R^+$$

$$\exp(x) = e^x$$

مثال:

خواص تابع نمایی را با دستور فوق مرور کنید.

$$e^x > 0, \quad e^0 = 1, \quad e^1 = e, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$e^{x+y} = e^x \times e^y$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$e^{\alpha x} = (e^x)^\alpha$$

$$e^{Ln(x)} = x : \forall x > 0$$

$$Ln(e^x) = x : \forall x$$

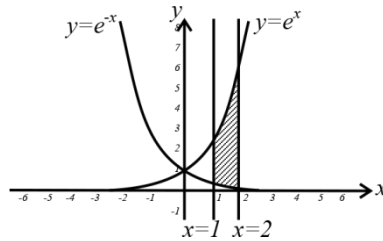
$$(e^x)' = e^x, \quad (e^u)' = e^u \times u', \quad \int e^x dx = e^x + K$$

نکته: ثابت می‌شود $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$ برای هر α .

مثال:

مساحت ناحیه محدود بین منحنی‌های $y = e^x$ و $y = e^{-x}$ و خطوط عمودی $x = 1$ و $x = 2$ را به دست آورید.

حل:



$$S = \int_1^2 (e^x - e^{-x}) dx = e^x - (-e^{-x}) \Big|_1^2 = e^x + e^{-x} \Big|_1^2 = (e^2 + \frac{1}{e^2}) - (e + \frac{1}{e})$$

واحد سطح

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

مثال:

حل: با توجه به اینکه $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ ، در حد فوق به حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$

بر می‌خوریم و اگر قانون هوییتال را مستقیماً برای عبارت $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ بکار ببریم

دوباره به حالت $\frac{\infty}{\infty}$ در عبارت $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ می‌رسیم و این فرآیند (حالت $\frac{\infty}{\infty}$) تا

بی‌نهایت مرتبه تکرار می‌شود، بنابراین قبل از بکار بردن قانون هوییتال ظاهر عبارت را به

شکلی ساده‌تر تبدیل می‌کنیم یعنی

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{e^x + \frac{1}{e^x}}{e^x - \frac{1}{e^x}} = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{2e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

تابع نمایی عام یا تابع نمایی در پایه a برای هر $a > 0$ و $a \neq 1$

تعریف: تابع نمایی عام یا تابع نمایی در پایه a

اگر a یک عدد مثبت غیر از یک باشد، تابع زیر را تابع نمایی در پایه a یا تابع نمایی عام می‌نامیم.

$$\exp_a : R \rightarrow R^+$$

$$\exp_a(x) = a^x$$

خواص تابع نمایی عام یا تابع نمایی در پایه a

$$D_y = R, \quad R_y = R^+ \quad (1)$$

$$\forall_x : a^x > 0, \quad a^0 = 1, \quad a^1 = a$$

$$a^{x+y} = a^x \times a^y$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y} \quad (2)$$

$$a^{\alpha x} = (a^x)^\alpha$$

$$\exp_a(x) = a^x = e^{x \ln(a)} \quad (3)$$

زیرا برای هر $0 < x$ ، $\exp o \ln(x) = x$ و اگر در این رابطه به جای x قرار دهیم a^x داریم:

$$\forall x : \exp o \ln(a^x) = a^x \Rightarrow \exp(x \ln(a)) = a^x \Rightarrow e^{x \ln(a)} = a^x$$

$$\Rightarrow (a^x)' = (e^{x \ln(a)})' = e^{x \ln(a)} \ln(a) = a^x \times \ln(a)$$

$$\Rightarrow (a^u)' = a^u \times \ln(a) \times u'$$

$$\Rightarrow \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + K$$

$$\int_{-1}^1 (3^x + 3^{-x}) dx = 2 \int_0^1 (3^x + 3^{-x}) dx = \frac{3^x}{\ln(3)} + \frac{3^{-x}}{\ln(3)(-1)} \Big|_0^1 \times 2 \quad \text{مثال:}$$

$$\frac{2}{\ln(3)} \left(3^x - \frac{1}{3^x} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{\ln(3)} \left(3 - \frac{1}{3} \right) = \frac{16}{3\ln(3)} = \frac{16}{\ln(27)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x \quad (۴)$$

a یک عدد ثابت و مثبت غیر از واحد می باشد، اگر $a > 1$ پس $\ln(a) > 0$ و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln(a)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln(a)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

ولی اگر $0 < a < 1$ پس $\ln(a) < 0$ و خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln(a)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x \ln(a)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = +\infty$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 3^{\frac{1}{x}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} 3^{\frac{1}{x}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^x = +\infty$$

تابع لگاریتم عام یا لگاریتم در پایه a ($a \neq 1$, $0 < a$)

در تابع $y = a^x$ دیدیم که $y' = a^x \ln(a)$ ، اگر $a > 1$ ، $y' > 0$ و تابع اکیداً صعودی و اگر $0 < a < 1$ ، $\ln(a) < 0$ پس $y' < 0$ و این تابع اکیداً نزولی است. در هر دو حالت تابع اکیداً یکنواست پس یک به یک و وارون پذیر است.

تعریف: تابع لگاریتم عام یا لگاریتم در پایه a

اگر a یک عدد ثابت مثبت غیر از یک باشد، وارون تابع $\exp_a$ را تابع لگاریتم در پایه a و یا تابع لگاریتم عام می‌نامیم و با نماد $\log_a$ آن را نشان می‌دهیم.

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\exp_a} & \\ R & & R^+ \\ & \xleftarrow{\log_a} & \end{array}$$

خواص تابع لگاریتم در پایه a

(۱)

$$D_{\log_a} = R_{\exp_a} = R^+$$

$$R_{\log_a} = D_{\exp_a} = R$$

$$\log_a^1 = 0, \quad \log_a^a = 1$$

(۲)

$$\times \xrightarrow{\log_a} + \quad \forall x, y > 0: \log_a^{(x \times y)} = \log_a^{(x)} + \log_a^{(y)}$$

$$\div \xrightarrow{\log_a} - \quad \forall x, y > 0: \log_a^{\left(\frac{x}{y}\right)} = \log_a^{(x)} - \log_a^{(y)}$$

$$\text{توان} \xrightarrow{\log_a} \text{ضرب} \quad \forall x > 0: \log_a^{(x^\alpha)} = \alpha \log_a^{(x)}$$

(۳)

$$\log_a^{(a^x)} = x \quad \forall x$$

$$a^{\log_a^{(x)}} = x \quad \forall x > 0$$

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را تا جای ممکن ساده کنید.

$$\log_{10}^{(0.001)} = \log_{10}^{(10^{-3})} = -3$$

$$\log_4^{(2)} = \log_4^{(\sqrt{4})} = \log_4^{(4^{\frac{1}{2}})} = \frac{1}{2}$$

$$(\log_4^{(2^{\sin(x)})})' = (\sin(x) \log_4^{(2)})' = (\sin(x) \times \frac{1}{2})' = \frac{\cos(x)}{2}$$

$$\log_2(\log_2(\log_2(\log_2^{(16)}))) = \log_2(\log_2(\log_2(\log_2^{(2^4)}))) =$$

$$\log_2(\log_2(\log_2^{(4)})) = \log_2(\log_2(\log_2^{(2^2)})) = \log_2(\log_2^{(2)}) = \log_2^1 = 0$$

همچنین در فرمول $a^{\log_a^{(x)}} = x$ برای هر $0 < x$ ، اگر از طرفین رابطه Ln بگیریم داریم:

$$Ln(x) = Ln(a^{\log_a^{(x)}}) \Rightarrow Ln(x) = \log_a^{(x)} \times Ln(a) \Rightarrow \log_a^{(x)} = \frac{Ln(x)}{Ln(a)}$$

$$\log_2^{(x)} = \frac{Ln(x)}{Ln(2)}$$

$$\log_{10}^{(x)} = \frac{Ln(x)}{Ln(10)}$$

$$\log_{\frac{1}{3}}^{(x)} = \frac{Ln(x)}{Ln(\frac{1}{3})} = \frac{Ln(x)}{-Ln(3)} = -\log_3^{(x)}$$

$$\log_2^3 \times \log_3^4 = \frac{Ln(3)}{Ln(2)} \times \frac{Ln(4)}{Ln(3)} = \frac{Ln(4)}{Ln(2)} = \frac{Ln(2^2)}{Ln(2)} = \frac{2Ln(2)}{Ln(2)} = 2$$

$$y = \log_a^{(x)} \Rightarrow y' = \left(\frac{Ln(x)}{Ln(a)} \right)' = \frac{\frac{1}{x}}{Ln(a)} = \frac{1}{xLn(a)}$$

$$\Rightarrow (\log_a^{(x)})' = \frac{1}{xLn(a)}$$

$$\Rightarrow (\log_a^{(u)})' = \frac{u'}{uLn(a)}$$

مثال:

$$(\log_3^{(\cos(2x))})' = \frac{-2\sin(2x)}{\cos(2x)Ln(3)} = \frac{-2tg(2x)}{Ln(3)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a^{(1+x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{(1+x)Ln(a)}}{1} = \frac{1}{Ln(a)}$$

توضیح: البته محاسبه حد در مثال فوق را می توان به کمک مفهوم مشتق به روش زیر نیز انجام داد.

$$\frac{Log_a^{(1+x)}}{x} = \frac{Log_a^{(1+x)} - Log_a^{(1)}}{(1+x) - 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a^{(1+x)}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a^{(1+x)} - \log_a^{(1)}}{(1+x) - 1} = (\log_a)'(1) = \frac{1}{x \ln(a)} \Big|_{x=1} = \frac{1}{\ln(a)}$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2^{(1+\sin(x))}}{\tan(x)} \cdot \frac{\cos(x)}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\cos(x)}{(1+\sin(x)) \ln(2)}}{1 + \tan^2(x)} = \frac{1}{\ln(2)}$$

(۵)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a^{(x)} = ? \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a^{(x)} = ?$$

اگر $a > 1$ باشد، $\ln(a) > 0$ پس،

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a^{(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a^{(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

و اگر $0 < a < 1$ باشد، $\ln(a) < 0$ پس،

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a^{(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = -\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a^{(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = -\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = +\infty$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_2^{(x)} = +\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_{\frac{1}{3}}^{(x)} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_2^{(x)} = -\infty \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_{\frac{1}{3}}^{(x)} = +\infty$$

تابع توان در حالت کلی

اگر f و g دو تابع باشند، تابع $y = f(x)^{g(x)}$ را می‌توان تعریف کرد که در آن هم پایه و هم توان هر دو در حال تغییر می‌باشند.

دامنه تعریف این تابع عبارت است از،

$$D_y = D_f \cap D_g \cap \{x \in D_f \mid f(x) > 0\} = D_g \cap \{x \in D_f \mid f(x) > 0\}$$

مثال: در تابع $y = x^x$ ، دامنه، R^+ می‌باشد و در تابع $y = \sin(x)^{\cos(x)}$ ، دامنه، نقاطی از R است که $\sin > 0$ ، مثل بازه $(0, \pi)$.

تابع $y = f^g$ مشابه تابع توان در پایه عدد ثابت a ، تعریف می‌شود و برای حد و مشتق و انتگرال آن از فرمول تابع نمایی استفاده کنیم. یعنی،

$$f^g = \exp \circ \ln(f^g) = \exp(g \ln(f)) = e^{g \ln(f)} \Rightarrow f^g = e^{g \ln(f)}$$

مثال:

$$y = x^x = e^{x \ln(x)}$$

$$y = \sin(x)^{\cos(x)} = e^{\cos(x) \ln(\sin(x))}$$

$$(x^x)' = (e^{x \ln(x)})' = e^{x \ln(x)} \times (x \ln(x))' = x^x (Ln(x) + x \times \frac{1}{x}) = x^x (1 + Ln(x))$$

$$(\sin(x)^{\cos(x)})' = (e^{\cos(x) \ln(\sin(x))})' = e^{\cos(x) \ln(\sin(x))} \times (\cos(x) \ln(\sin(x)))' =$$

$$\sin(x)^{\cos(x)} \times (-\sin(x) \ln(\sin(x)) + \cos(x) \times \frac{\cos(x)}{\sin(x)}) =$$

$$\sin(x)^{\cos(x)} \times (-\sin(x) \ln(\sin(x)) + \frac{\cos^2(x)}{\sin(x)})$$

بنابراین در محاسبه مشتق تابع f^g به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$(f^g)' = (e^{g \ln(f)})' = e^{g \ln(f)} \times (g \ln(f))' = f^g (g \ln(f))'$$

و همچنین در محاسبه حد این تابع یعنی $\lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)}$ ، اگر c ، $\pm\infty$ یا یک عدد حقیقی باشد،

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} e^{g(x) \ln(f(x))}$$

باید اول $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \ln(f(x))$ را در صورت وجود تعیین کنیم.

اگر $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \ln(f(x)) = \ell$ باشد بر حسب ℓ جواب حد را می‌نویسیم:

حالت اول: اگر ℓ یک عدد حقیقی باشد پس

$$\lim_{x \rightarrow \ell} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \ell} e^x = e^\ell$$

حالت دوم: اگر $\ell = +\infty$ ،

$$\lim_{x \rightarrow \ell} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

حالت سوم: اگر $\ell = -\infty$ ،

$$\lim_{x \rightarrow \ell} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

و در صورتی که $\lim_{x \rightarrow c} g(x) \ln f(x)$ موجود نباشد پس تابع f^g نیز در c حد ندارد.

مثال:

$$A = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1$$

مثال:

$$B = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow B = \lim_{x \rightarrow 1} e^x = e$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1 \Rightarrow B = \lim_{x \rightarrow 1} e^x = e$$

توضیح: مشابه مثال فوق اثبات می شود اگر a یک عدد حقیقی ثابت باشد،

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

مثال: به کمک قاعده فوق حدود زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{6x}\right)^{2x} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{6x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-1}{6x}\right)^x)^2 = \left(e^{\frac{-1}{6}}\right)^2 = e^{\frac{-2}{6}} = e^{\frac{-1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}} \quad \text{حل:}$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^{x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x}\right)^x \times \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{4}{x}} = e^4 \times \frac{1}{1+0} = e^4$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \ln(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \times \ln(x) = -\infty \Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

مثال:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}^{\frac{\sin(x)}{\ln(x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\sin(x)}{\ln(x)} \ln(\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\sin(x) \times \frac{1}{2} \ln(x)}{\ln(x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\sin(x)}{2}}$$

از آنجا که $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{2}$ وجود ندارد پس حد فوق نیز وجود ندارد.

تمرین

۱. اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ، $(f^{-1})'(\frac{3}{2})$ را به دو روش متفاوت (به کمک ضابطه f^{-1} و به کمک قضیه مشتق تابع معکوس) تعیین کنید.

۲. مطلوب است

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x+\ln(x)}{x^3-3x+2}, \left(\ln(\sin(x^3+1)) \right)', \left(\ln^5(\operatorname{tg}(3x)) \right)'$$

۳. ثابت کنید در نزدیکی نقطه $x=0$ ، $\ln(1+x) \sim x$.

۴. با داشتن $\ln(5)$ و $\ln(7)$ مطلوب است $\ln(9.8)$.

۵. به کمک خواص لگاریتم عبارت‌های زیر را تا جای ممکن ساده کنید.

$$y = \frac{\ln(35) + \ln(\frac{1}{7})}{\ln(25)} \text{ و } \ln(8x+4) - 2\ln(2) \text{ و } 3\ln\sqrt[3]{x^2-1} - \ln(x+1)$$

۶. نامعادله زیر را حل کنید.

$$\ln(x+1) < 2\ln(x-1)$$

۷. مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

$$y = (x^2 \ln(x))^4 \text{ و } y = \frac{x \ln(x)}{1 + \ln(x)} \text{ و } y = \ln(\ln(x))$$

$$y = \ln \sqrt{\frac{(x+1)^5}{(x+2)^{20}}} \text{ و } y = \int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} \ln(t) dt$$

۸. به کمک قضیه مقدار میانگین برقراری نامساوی‌های زیر را ثابت کنید.

$$(۱) \forall_{\alpha, \beta} : 0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2} : (\alpha - \beta) \operatorname{tg}(\beta) < \ln\left(\frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)}\right) < (\alpha - \beta) \operatorname{tg}(\alpha)$$

$$(۲) \forall x : \frac{\pi}{2} < x < \pi : \cot g(x) \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \leq \ln(\sin(x)) < 0$$

$$(۳) \forall x : 0 < x \leq 1 : \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) > \frac{x}{x+1}$$

$$(۴) \forall x : x \geq 0 : \ln(1+x) \geq \frac{x}{x+1}$$

۹. بازه‌های صعودی و نزولی توابع زیر را تعیین کنید.

$$y = 2x^2 - \ln(x)$$

$$y = \ln(1 - x^2)$$

$$y = \frac{2x}{\ln(x)}$$

$$y = \ln |x|$$

۱۰. انتگرال‌های زیر را حل کنید.

$$\int \cot(x) dx \text{ و } \int \csc(x) dx \text{ و } \int_1^2 \frac{2 \ln(x) dx}{x}$$

$$\int_2^{16} \frac{dx}{2x \sqrt{\ln(x)}} \text{ و } \int \frac{3 \sec^2(x) dx}{6 + 3 \operatorname{tg}(x)} \text{ و } \int \frac{\ln(x) dx}{x} \text{ و } \int_2^4 \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{x} - 1}$$

۱۱. به کمک خواص لگاریتم مشتق توابع زیر را حساب کنید (مشتق‌گیری لگاریتمی).

$$y = \sqrt{(x+1)^2 (x-1)^2} \text{ و } y = \frac{x \sin(x)}{\sqrt{\sec(x)}} \text{ و } y = \sqrt[3]{\frac{x(x-2)}{x^2+1}}$$

$$y = \sin(x)^x \text{ و } y = \left(\frac{(x+1)(x-1)}{(x-2)(x+3)}\right)^5$$

۱۲. معادلات زیر را بر حسب x حل کنید.

$$e^{x \ln(0.2)} = 0.4 \text{ و } e^{x^2} \times e^{2x+1} = 1 \text{ و } e^{-0.001 \times x} = 1000$$

۱۳. نمودار $y = | \ln(x) |$ را رسم کرده و سپس در مشتق پذیری این تابع در نقطه $x = 1$ تحقیق کنید.

۱۴. طول منحنی‌های زیر را بر بازه‌های داده شده تعیین کنید.

الف: منحنی $y = \ln |\sec(x)|$ بر بازه $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

ب: منحنی $y = \ln |\cos(x)|$ بر بازه $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ به کمک قسمت (الف).

۱۵. معادله خط مماس بر نمودار $y = \ln(x)$ که از مبدأ می‌گذرد چیست؟

۱۶. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\cot g(x)}$.

۱۷. نامعادله $1 + \ln(x-1) < \ln(x)$ را حل کنید.

۱۸. مشتق توابع زیر را حساب کنید.

$$y = \cos(e^{-x^2}) \text{ و } y = \ln(3xe^{-x}) \text{ و } y = \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) \text{ و } y = \int_{e^{\sqrt{x}}}^{e^{2x}} \ln(t) dt$$

$$y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \text{ و } y = \exp(e^x) \text{ و } y = e^{2x + \ln(x)} \text{ و } y = e^{\sin(x^2) + 4}$$

۱۹. بازه‌های صعودی و نزولی توابع زیر را مشخص کنید.

$$y = x^2 e^{-x}, y = e^x + 5x$$

۲۰. به کمک مشتق گیری لگاریتمی ثابت کنید تابع $y = \frac{-e^{-x^2}}{2x^2}$ ، جواب معادله

$$xy' + 2y = e^{-x^2} \text{ می‌باشد.}$$

۲۱. معادله خط مماس بر منحنی $y = e^{-x}$ که بر خط $2x - y = 5$ عمود باشد را تعیین کنید.

۲۲. تعیین کنید تحت چه زاویه‌ای منحنی $y = e^x$ ، محور y ها را قطع می‌کند.

۲۳. با فرض آنکه $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ ، مطلوب است $(f^{-1})'(0)$.

۲۴. با فرض آنکه $f: R \rightarrow R$ تابعی با دستور $f(x) = \int_0^{x^3+x} e^{-t^2} dt$ باشد،
اولاً: ثابت کنید f وارون‌پذیر است.
ثانیاً: $(f^{-1})'(0)$ را در صورت وجود تعیین کنید.

۲۵. حوزه پیوستگی تابع $y = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$ را تعیین کنید.

۲۶. حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^4},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x e^{-t^2} dt}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$$

۲۷. انتگرال‌های زیر را حل کنید.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2e^{\sin(x)} \cos(x) dx \quad \text{و} \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + e^{\cot g(x)}) \csc^2(x) dx$$

$$\int (x+3)e^{x^2+6x+3} dx \quad \text{و} \quad \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln(x))} \quad \text{و} \quad \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} e^x dx$$

$$\int x e^{x^2} dx \quad \text{و} \quad \int x e^{-x^2} dx$$

$$\int \frac{e^x dx}{e^x - 1} \quad \text{و} \quad \int \frac{dx}{e^x + 1} \quad \text{و} \quad \int \frac{e^{3x} + 1}{e^x + 1} dx$$

۲۸. اگر f تابعی پیوسته و غیر پایا (تابع ثابت نباشد) و $\int_0^x \frac{f(t)e^t}{1+e^{-t}} dt = f^2(x)$

ضابطه f را به‌طور دقیق تعیین کنید.

۲۹. به کمک استقرای ریاضی ثابت کنید.

$$\forall x > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} : e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

۳۰. مشتق توابع زیر را حساب کنید.

$$y = 5^{\sqrt{x}} \text{ و } y = \log_2^{(5x)} \text{ و } y = \log_4^{(x)} - \log_4^{(x^2)} \text{ و } y = \log_{25}^{(e^x)} - \log_5^{(\sqrt{x})}$$

$$y = 3\log_4(\log_2^x)$$

۳۱. حدهای زیر را در صورت وجود حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2+e^x)}{3^x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2-2^{\frac{1}{x}}}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} 3 + \frac{1}{1+7^{\frac{1}{1-x}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1}{\sqrt{1+x} - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x(a^{\frac{1}{x}} - 1), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} \quad (a > b > 0 \text{ با شرط})$$

۳۲. ثابت کنید معادله $2^x = 1$ یک ریشه مثبت کمتر از واحد دارد.

۳۳. انتگرال‌های زیر را حل کنید.

$$\int_1^{e^x} \frac{dt}{t} \text{ و } \int_{-1}^3 5^x dx \text{ و } \int 3^x e^x dx \text{ و } \int x^{2x^2} dx \text{ و } \int \frac{3^x}{3-3^x} dx$$

$$\int \frac{x 2^{(x^2)}}{1+2^{(x^2)}} dx \text{ و } \int_1^4 \frac{\log_2^{(x)}}{x} dx \text{ و } \int \frac{a^{2x} - 1}{\sqrt{a^x}} dx$$

۳۴. به کمک مفهوم دیفرانسیل، تقریبی از $\log_{10}^{(10.21)}$ را حساب کنید.

۳۵. نمودار تقریبی تابع‌های $\log_2^x$ و $\log_3^x$ و $\log_{\frac{1}{3}}^x$ را (به کمک نمودار $y = \ln(x)$) رسم کنید.

۳۶. مطلوب است $(x^{\frac{1}{x}})', (tg(x)^{\sqrt{x}})'$.

۳۷. نمودار تابع $y = x^x$ را به طور دقیق (با ذکر همه مراحل) رسم کنید.

۳۸. نمودار تابع $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{1+x^n}$ را برای $x \geq 0$ ، رسم کنید.

۳۹. اولاً: در مشتق‌پذیری تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با دستور $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x}} & x > 0 \\ x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ در

نقطه $x = 0$ تحقیق کنید.

ثانیاً: نقاط اکسترموم f روی $\mathbb{R}$ در صورت وجود کدامند.

۴۰. به کمک روش مشتق‌گیری لگاریتمی مشتق توابع زیر را حساب کنید.

$$y = (\sqrt{x})^x \text{ و } y = x^{\sin(x)} \text{ و } y = (\ln(x))^{\ln(x)} \text{ و } y = \sin(x^x)$$

۴۱. پاسخ حدهای زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)^2}{x \sin(x)}, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln(x))^2}{\ln(\sin(x))} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^+} x^{\frac{1}{x-1}} \text{ و } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x}}, \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) \ln(x), \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x - 3x}{3^x + 4^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{(x^2)}}{xe^x}, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^{\frac{-1}{x}}}, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^x, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x, \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln(x)}{x}\right)^x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x (1 + \sin(2t))^{\frac{1}{t^2}} dt, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}}, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}(x)^{\operatorname{tg}(2x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg}(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} |\operatorname{tg}(x)|^{\operatorname{tg}(x)}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x)^{\ln(1-\frac{1}{x})}, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin(x)}, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin(x)^{\operatorname{tg}(x)}, \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}(x)^{\cot(x)}, \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x)$$

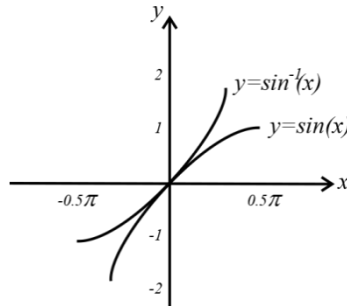
۴۲. در معادلات زیر مجهول y را بر حسب x تعیین کنید.

$$3^y = 3 \ln(x), 9e^{2y} = x^2, \ln(y-1) = x + \ln(y)$$

توابع مثلثاتی معکوس

در این قسمت توابع مثلثاتی معکوس را از لحاظ دامنه و برد و نمودار و مشتق آن‌ها بررسی می‌کنیم و در فصل بعدی این مطالب را در بیان برخی از انواع روش‌های انتگرال‌گیری از جمله تغییر متغیر مثلثاتی و انتگرال تابع گویا به کار می‌بندیم.

تابع سینوس معکوس



$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \xrightarrow{\sin} [-1, 1] \xleftarrow{\sin^{-1}}$$

$$y = \sin^{-1}(x) \Rightarrow x = \sin(y)$$

از دو طرف رابطه بالا مشتق می‌گیریم.

$$\Rightarrow 1 = y' \cos(y)$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\cos(y)}$$

$$\cos(y) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(y)} = \pm \sqrt{1 - x^2}$$

از آنجا که برای وارون‌پذیری تابع، یک به یک بودن شرط است پس قسمتی از یک دوره تناوب تابع $\sin$ که در آن تابع سینوس یک به یک می‌باشد به طور مثال ربع اول و

چهارم یعنی بازه $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$ را در نظر می‌گیریم و در این حالت معکوس تابع $\sin$ یعنی

$\sin^{-1}$ را با نماد Arcsin نشان می‌دهیم بدیهی است که می‌توانستیم برای حفظ یک به

یک بودن تابع ربع دوم و سوم یعنی بازه $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$ را نیز در نظر بگیریم، در این حالت

تابع $\sin^{-1}$ را با نماد $\arcsin$ نشان می‌دهیم، به طور کلی هر بازه‌ای که برای دامنه تابع

$\sin$ و یا برد تابع $\sin^{-1}$ به کار ببریم نه لزوماً $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ، نماد $\arcsin$ برای بیان تابع $\sin^{-1}$ استفاده می‌شود.

حال با توجه به دامنه فوق در معرفی تابع $\sin^{-1}$ ، واضح است که در ربع اول و چهارم مقدار کسینوس مثبت می‌باشد بنابراین

$$\begin{aligned}\cos(y) &= \sqrt{1-x^2} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \Rightarrow (\sin^{-1}(x))' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \Rightarrow (\sin^{-1}(u))' &= \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}\end{aligned}$$

مثال:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1}(x) - x}{x^3} \cdot \frac{0}{0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{3x^2} \cdot \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1-x^2)^{-\frac{1}{2}})'}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{2} \times (-2x)(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6\sqrt{(1-x^2)^3}} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

همچنین،

$$(\sin^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}(x) + K$$

و به راحتی ثابت می‌شود برای هر عدد ثابت a ، (ثابت و مثبت a) داریم:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + K$$

مثال:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{3}} \frac{dx}{\sqrt{2^2 - (3x)^2}} = \frac{\sin^{-1}(\frac{3x}{2})}{3} \bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{3}} \\ &= \frac{1}{3} \left[\sin^{-1}\left(\frac{3 \times \frac{\sqrt{2}}{3}}{2}\right) - \sin^{-1}(0) \right] = \frac{\sin^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}) - \sin^{-1}(0)}{3}\end{aligned}$$

منظور از $\sin^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})$ ، یعنی زاویه‌ای است در ربع اول یا چهارم که سینوس آن برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ باشد یعنی زاویه $\frac{\pi}{4}$ و منظور از $\sin^{-1}(0)$ ، زاویه‌ای در ربع اول یا چهارم است که مقدار سینوس آن برابر صفر باشد یعنی زاویه صفر، بنابراین،

$$I = \frac{\frac{\pi}{4} - 0}{3} = \frac{\pi}{12}$$

مثال:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$$

حل:

$$4x - x^2 = -(x^2 - 4x) = -[(x^2 - 4x + 4) - 4] = -[(x - 2)^2 - 4] = 4 - (x - 2)^2$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x - 2)^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{2^2 - (x - 2)^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x - 2}{2}\right) + K$$

مثال:

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{4 + 2x - 3x^2}}$$

حل:

$$4 + 2x - 3x^2 = 4 - 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x\right) = 4 - 3\left(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\right) = 4 - 3\left[\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right]$$

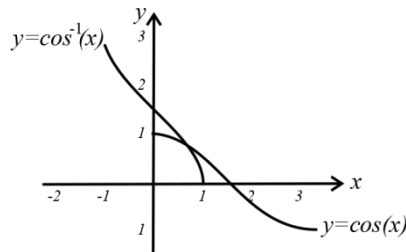
$$= 4 - 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{13}{3} - 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = 3\left(\frac{13}{9} - \left(x - \frac{1}{3}\right)^2\right) = 3\left(\left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{3}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{13}}{3}\right)^2 - \left(x - \frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin^{-1}\left(\frac{x - \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{13}}{3}}\right) = \frac{\sin^{-1}\left(\frac{3x - 1}{\sqrt{13}}\right)}{\sqrt{3}} + K$$

تابع کسینوس معکوس

برای یک به یک بودن تابع کسینوس قسمتی از دوره تناوب آن مثلاً بازه $[0, \pi]$ یعنی ربع اول و دوم را در نظر می‌گیریم و به طور مشابه تابع سینوس، در این حالت معکوس آن را با نماد Arc cos نشان می‌دهیم بنابراین،

$$[0, \pi] \xrightarrow[\cos^{-1}]{\cos} [-1, 1]$$



مثال:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \cos^{-1}(x) = \pi$$

$$(\cos^{-1}(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

مثال: ثابت کنید توابعی با ضابطه‌های زیر برابرند.

$$y_1 = \cos^{-1}(x)$$

$$y_2 = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(x)$$

$$y_3 = \frac{\pi}{2} + \sin^{-1}(-x)$$

حل: اگر قرار دهیم

$$f(x) = \cos^{-1}(x)$$

$$g(x) = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(x)$$

$$h(x) = \frac{\pi}{2} + \sin^{-1}(-x)$$

ثابت می‌کنیم توابع f و g برابرند و به طور مشابه ثابت می‌شود توابع f و h نیز یکسانند بنابراین هر سه تابع برابرند.

برای اثبات تساوی دو تابع f و g :
اولاً:

$$\left. \begin{aligned} D_f &= D_{\cos^{-1}} = R_{\cos} = [-1, 1] \\ D_g &= D_{\sin^{-1}} = R_{\sin} = [-1, 1] \end{aligned} \right\} \Rightarrow D_f = D_g$$

ثانیاً: باید ثابت کنیم ضابطه‌های دو تابع برابرند برای این کار از هر دو ضابطه مشتق می‌گیریم.

$$\left. \begin{aligned} f'(x) &= (\cos^{-1}(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ g'(x) &= \left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(x)\right)' = 0 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow f'(x) = g'(x)$$

چون $f' = g'$ پس توابع f و g حداکثر در عدد ثابتی مانند K ، با هم متفاوتند یعنی $f = g + K$ برای اثبات تساوی کافی است ثابت کنیم $K = 0$.

$$f(x) = g(x) + K \Rightarrow \cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(x) + K : -1 \leq x \leq 1$$

برای یافتن K ، به x مقدار می‌دهیم مثلاً $x = 0$ ، داریم:

$$\cos^{-1}(0) = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(0) + K$$

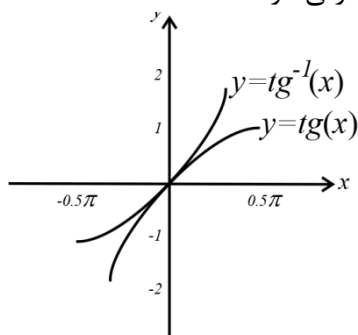
منظور از $\cos^{-1}(0)$ ، زاویه‌ای در ربع اول یا دوم مثلثاتی است که مقدار کسینوس آن برابر صفر باشد یعنی $\frac{\pi}{2}$ پس،

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 0 + K \Rightarrow K = 0 \Rightarrow f(x) = g(x) \Rightarrow f = g$$

تابع تانژانت معکوس

$$(tg(x))' = 1 + tg^2(x) > 0$$

تابع تانژانت در هر دوره تناوب خود اکیداً صعودی پس وارون پذیر است، بنابراین اگر $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ یا به عبارتی ربع اول و چهارم مثلثاتی را به عنوان دامنه در نظر بگیریم، می توان وارون این تابع را معرفی کرد.



$$\begin{array}{c} \xrightarrow{tg} \\ \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ \xleftarrow{tg^{-1}} \end{array} R$$

$$(tg^{-1}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (tg^{-1}(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{1+x^2} = tg^{-1}(x) + K$$

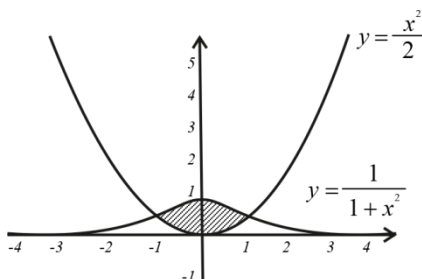
$$\Rightarrow \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} tg^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + K$$

a یک عدد ثابت مثبت

مثال: مطلوب است مساحت ناحیه محدود بین منحنی های $y = \frac{x^2}{2}$ و $y = \frac{1}{1+x^2}$.

حل:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ y = \frac{1}{1+x^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{2}$$



$$\Rightarrow x^2 + x^4 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow t^2 + t - 2 = 0$$

$x^2 = t$ که در آن

$$\Rightarrow (t+2)(t-1) = 0 \Rightarrow t = -2, \quad t = 1$$

$$t = x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\Rightarrow \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2 \left(\operatorname{tg}^{-1}(x) - \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1$$

منظور از $\operatorname{tg}^{-1}(1)$ ، زاویه‌ای در ربع اول یا چهارم مثلثاتی است که مقدار tg آن برابر

یک باشد یعنی $\frac{\pi}{4}$ ، بنابراین

$$s = 2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$$

مثال: انتگرال‌های زیر را حل کنید.

$$\int \frac{x^2 dx}{4+2x^6} \quad \int \frac{e^x \operatorname{tg}^{-1}(e^x)}{1+e^{2x}} dx \quad \text{و} \quad \int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}$$

حل: $\int \frac{x^2 dx}{4+2x^6}$ را حل کرده و دو مورد دیگر به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{2+x^6} = \frac{1}{2} \int \frac{x^2 dx}{2+(x^3)^2}$$

قرار می‌دهیم $u = x^3$

$$du = 3x^2 dx \Rightarrow I = \frac{1}{2 \times 3} \int \frac{3x^2 dx}{2+(x^3)^2} =$$

$$\frac{1}{6} \int \frac{du}{(\sqrt{2})^2 + u^2} = \frac{1}{6\sqrt{2}} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{u}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{6\sqrt{2}} \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{x^3}{\sqrt{2}} \right) + K$$

$$\int_0^\pi \frac{x \sin(x)}{1+\cos^2(x)} dx$$

مثال:

حل: در قسمت تغییر متغیر قبلاً گفتیم اگر بازه $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ یا $[0, \pi]$ و تابع زیر انتگرال مثلثاتی

باشد، گاهی تغییر متغیر $u = \frac{\pi}{2} - x$ مفید است، در این مثال با قرار دادن $u = \frac{\pi}{2} - x$

$$x = \frac{\pi}{2} - u, \quad dx = -du$$

$$x = \pi \Rightarrow u = \frac{\pi}{2} - \pi = \frac{-\pi}{2}$$

$$x = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\frac{\pi}{2} - u) \sin(\frac{\pi}{2} - u)}{1 + \cos^2(\frac{\pi}{2} - u)} (-du) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\frac{\pi}{2} - u) \cos(u)}{1 + \sin^2(u)} du$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{1 + \sin^2(u)} du - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{u \cos(u)}{1 + \sin^2(u)} du$$

تابع $\frac{\cos(u)}{1 + \sin^2(u)}$ زوج و تابع $\frac{u \cos(u)}{1 + \sin^2(u)}$ بر حسب u تابعی فرد و بازه متقارن است پس

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{1 + \sin^2(u)} du = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{1 + \sin^2(u)} du \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{u \cos(u)}{1 + \sin^2(u)} du = 0 \Rightarrow \text{و}$$

$$I = \frac{\pi}{2} \times 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{1 + \sin^2(u)} du = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)}{1 + \sin^2(u)} du$$

در این مرحله اگر $t = \sin(u)$ را به عنوان متغیر جدید در نظر بگیریم.

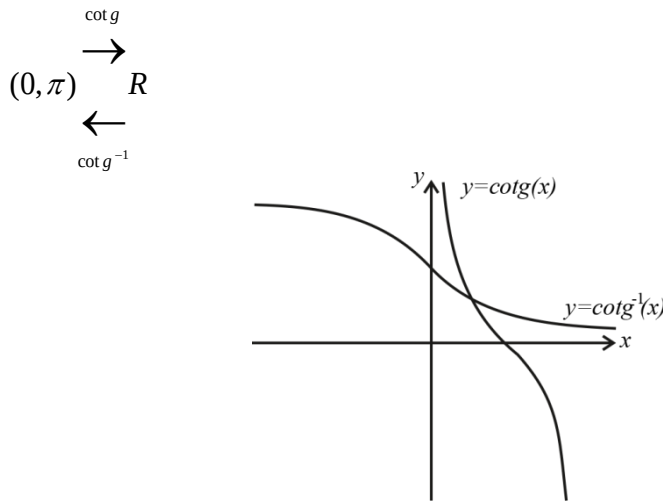
$$t = \sin(u) \Rightarrow dt = \cos(u) du \Rightarrow$$

$$\int \frac{\cos(u) du}{1 + \sin^2(u)} = \int \frac{dt}{1 + t^2} = tg^{-1}(t) = tg^{-1}(\sin(u)) \Rightarrow$$

$$I = \pi tg^{-1}(\sin(u)) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi (tg^{-1}(\sin(\frac{\pi}{2})) - 0) = \pi tg^{-1}(1) = \pi \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{4}$$

تابع کتانژانت معکوس

پس یک به یک و وارون پذیر است. اگر بازه $(0, \pi)$ یعنی ربع اول و دوم مثلثاتی را در نظر بگیریم داریم:



$$(\cot g^{-1}(x))' = \frac{-1}{1+x^2}$$

مثال:

$$\begin{aligned} (\cot g^{-1}(\frac{2x}{1-x^2}))' &= \frac{-1}{1+(\frac{2x}{1-x^2})^2} \times (\frac{2x}{1-x^2})' = \\ &= \frac{-1}{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}} \times \frac{2(1-x^2)-(-2x)2x}{(1-x^2)^2} = \frac{-1}{1+x^4+2x^2} \times (2+2x^2) \\ &= \frac{-1}{(1+x^2)^2} \times 2(1+x^2) = \frac{-2}{1+x^2} \end{aligned}$$

مثال: ضابطه دقیق تابع $y = \cot g^{-1}(x) + \cot g^{-1}(\frac{1}{x})$ را تعیین کنید.

حل: اول دامنه تابع را تعیین می کنیم.

$$D_y = D_{\cot g^{-1}} - \{0\} = R_{\cot g} - \{0\} = R - \{0\}$$

از طرفی

$$y' = \frac{-1}{1+x^2} + \frac{-1}{1+(\frac{1}{x})^2} \times (\frac{1}{x})' = \frac{-1}{1+x^2} + \frac{-1}{1+\frac{1}{x^2}} \times \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2} = 0$$

بنابراین $y' = 0$ بر $R - \{0\}$ ، یعنی بر بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ تابع، تابعی ثابت است پس،

$$y = \begin{cases} A & x > 0 \\ B & x < 0 \end{cases}$$

که در آن A و B دو عدد ثابت هستند.

برای یافتن اعداد ثابت A و B به مقدار x می‌دهیم.

اگر قرار دهیم $x = 1$ ، $y = A$ یعنی

$$A = \cot g^{-1}(1) + \cot g^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

و اگر قرار دهیم $x = -1$ ، $y = B$ یعنی

$$B = \cot g^{-1}(-1) + \cot g^{-1}(\frac{1}{-1}) = \frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow y = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x > 0 \\ \frac{3\pi}{2} & x < 0 \end{cases}$$

تابع سکانت معکوس

تابع $\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$ ، واضح است که هر جا $\cos(x) \neq 0$ وارون پذیر باشد، تابع

$\sec(x)$ هم وارون پذیر است. بنابراین مانند تابع $\cos(x)$ ، ربع اول و دوم بجز $x = \frac{\pi}{2}$

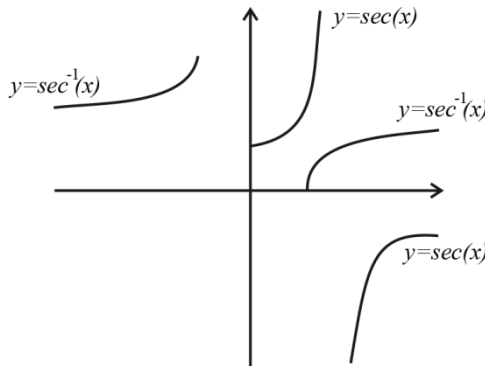
را به عنوان دامنه این تابع در حوزه وارون پذیری اختیار می کنیم.

از طرفی

$$|\cos(x)| \leq 1 \Rightarrow |\sec(x)| = \frac{1}{|\cos(x)|} \geq 1$$

بنابراین

$$[0, \pi] - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\} \xrightarrow[\sec^{-1}]{\sec} (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$



$$(\sec^{-1}(x))' = \frac{1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}$$

بدیهی است که چون تابع کسینوس در این دو ربع نزولی است پس باید تابع

$\sec = \frac{1}{\cos}$ تابع صعودی و در نتیجه $\sec^{-1}$ هم صعودی باشد و $(\sec^{-1})' > 0$ است.

مثال:

$$\left(\sec^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) \right)' = \frac{1}{\left| \frac{1}{x} \right| \sqrt{\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 1}} \times \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\frac{1}{|x|} \sqrt{1 - x^2}} \times \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

مثال:

$$\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2 \frac{\cos(\sec^{-1}(x))}{x\sqrt{x^2-1}} dx$$

حل: اگر قرار دهیم $u = \sec^{-1}(x)$

$$du = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} dx$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \leq x \leq 2 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow du = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow I = \int \cos(u) du = \sin(u) = \sin(\sec^{-1}(x)) \Big|_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^2$$

$$= \sin(\sec^{-1}(2)) - \sin\left(\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

منظور از $\sec^{-1}(2)$ در رابطه بالا یعنی زاویه‌ای در ربع اول یا دوم که مقدار $\sec$ آن برابر ۲ و یا به عبارتی مقدار کسینوس آن برابر $\frac{1}{2}$ باشد یعنی زاویه $\frac{\pi}{3}$ و بطور مشابه منظور

از $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ یعنی زاویه‌ای در ربع اول یا دوم که مقدار سکانت آن $\frac{2}{\sqrt{3}}$ و یا

کسینوس آن $\frac{\sqrt{3}}{2}$ باشد که همان زاویه $\frac{\pi}{6}$ می‌باشد بنابراین

$$I = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

از آنجا که $\left(\sec^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ داریم:

$$\int \frac{dx}{|x|\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}(x) + k$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \sec^{-1}(x) + k & : x > 0 \\ -\sec^{-1}(x) + k & : x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sec^{-1}(x) + k & : x > 1 \\ -\sec^{-1}(x) + k & : x < -1 \end{cases}$$

با فرض $0 < a$

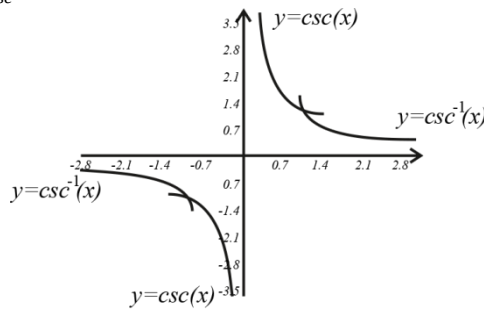
$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \begin{cases} \frac{1}{a} \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + k & x > a > 0 \\ -\frac{1}{a} \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + k & x < -a < 0 \end{cases}$$

تابع کسکانت معکوس

مشابه تعریف تابع $\sec^{-1}$, $\csc = \frac{1}{\sin}$, هر جا که تابع $\sin$ وارون‌پذیر و ناصفر باشد تابع

کسکانت هم وارون‌پذیر است، بنابراین برای حوزه وارون‌پذیری این تابع ربع اول و چهارم بدون صفر را انتخاب می‌کنیم و از طرفی چون $|\sin(x)| \leq 1$ پس $|\csc(x)| \geq 1$ ، بنابراین

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] - \{0\} \xrightarrow[\csc^{-1}]{\csc} (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$



$$\left(\csc^{-1}(x)\right)' = \frac{-1}{|x| \sqrt{x^2 - 1}}$$

مثال:

$$\left(\csc^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right)' = \frac{-1}{\left|\frac{x}{2}\right| \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 - 1}} \times \frac{1}{2} = \frac{-2}{|x| \sqrt{x^2 - 4}}$$

مثال: مطلوب است مقادیر زیر در صورت وجود.

$$\sec(\sec^{-1}(\frac{1}{2}))$$

وجود ندارد زیرا $\frac{1}{2} \notin D_{\sec^{-1}} = R_{\sec} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

$$\sec^{-1}(\sec(\frac{5\pi}{4})) = \frac{5\pi}{4}$$

$$\sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)\right) = \frac{-1}{3}$$

$$\cos(\cos^{-1}(-4))$$

وجود ندارد زیرا $[-1, 1] = R_{\cos} = D_{\cos^{-1}}$ و $-4 \notin D_{\cos^{-1}}$.

$$\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right) = ?$$

اگر قرار دهیم $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = \alpha$ داریم:

$$\cos(\alpha) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

صرف نظر از علامت منفی در کسر،

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{ضلع مجاور به } \alpha}{\text{وتر}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$\Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{2})^2 - 1^2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

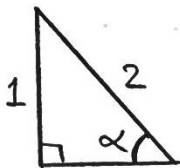
از طرفی طبق تعریف تابع $\cos^{-1}$ ، انتهای کمان α در ربع اول یا دوم قرار دارد و در این مثال چون $\cos(\alpha) < 0$ پس انتهای کمان در ربع دوم قرار دارد اما در این ربع علامت $\sin$ مثبت است پس

$$\sin(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cot g\left(\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)\right) = ?$$

اگر قرار دهیم $\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right) = \alpha$ داریم $\sin(\alpha) = \frac{-1}{2}$ و صرف نظر از علامت کسر،

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{1}{2}$$



$$\Rightarrow \cot g(\alpha) = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \frac{\sqrt{2^2 - 1^2}}{1} = \sqrt{3}$$

ازطرفی برای تابع $\sin^{-1}$ ، ربع اول و چهارم را در نظر می‌گیریم در اینجا چون $\sin < 0$ پس انتهای کمان α در ربع چهارم قرار دارد یعنی $\cot g < 0$ پس

$$\cot g(\sin^{-1}(\frac{-1}{2})) = -\sqrt{3}$$

تمرین

۱. حدهای زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^{-1}(x^2)}{(\sin^{-1}(x))^2}, \lim_{x \rightarrow 1^-} \sin^{-1}(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sec^{-1}(x)}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2tg^{-1}(3x)}{7x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sec^{-1}(x), \lim_{x \rightarrow -1} \csc^{-1}(x)$$

۲. مشتق توابع زیر را حساب کنید.

$$\sin^{-1}(1-x), tg^{-1}(\sqrt{x^2-1}) + \csc^{-1}(x), Ln(\cot g^{-1}(x)), \sec^{-1}(\frac{1}{x})$$

$$\sin^{-1}(\cos(x)), \sin^{-1}(\frac{2x}{1+x^2})$$

۳. ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $y = \cos^{-1}(x^2)$ را بر بازه $[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ تعیین کنید.

۴. حوزه پیوستگی تابع $y = tg^{-1}(\frac{1}{x})$ را مشخص کنید.

۵. با فرض $y = \sqrt[3]{tg^{-1}(\sqrt[5]{\cos(Ln^3(x))})}$ ، مطلوب است $\frac{dy}{dx}$.

۶. ثابت کنید اگر $b > a > 0$ آنگاه،

$$\frac{b-a}{1+b^2} < tg^{-1}(b) - tg^{-1}(a) < \frac{b-a}{1+a^2}$$

۷. ثابت کنید توابعی با ضابطه‌های زیر برابرند.

$$y_1 = \cot g^{-1}(x)$$

$$y_2 = \frac{\pi}{2} - tg^{-1}(x)$$

$$y_3 = \frac{\pi}{2} + tg^{-1}(-x)$$

۸. اگر $f: [\sqrt{2}, +\infty) \rightarrow R$ تابعی با ضابطه $f(x) = \int_{\sqrt{2}}^x \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$ باشد.

اولاً: ثابت کنید f وارون پذیر است.

ثانیاً: معادله خط مماس بر نمودار f^{-1} را در نقطه‌ای به طول $\frac{\pi}{12}$ تعیین کنید.

۹. ثابت کنید $\csc^{-1}(x) = \sin^{-1}(\frac{1}{x})$.

۱۰. انتگرال‌های زیر را حل کنید.

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}, \int \frac{dx}{9+3x^2}, \int \frac{dx}{x\sqrt{25x^2-2}}, \int_0^2 \frac{dx}{8+2x^2}, \int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{-\sqrt{2}}{3}} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}} \\ & \int \frac{\sec^2(x)dx}{\sqrt{1-tg^2(x)}}, \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}, \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(x)dx}{1+\sin^2(x)}, \int_1^{e^4} \frac{4dx}{x(1+Ln^2(x))} \\ & \int_{-1}^0 \frac{6dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}, \int_2^4 \frac{2dx}{x^2-6x+10}, \int \frac{x+4}{x^2+4}dx, \int \frac{dx}{\sqrt{-2x-x^2}} \\ & \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}, \int \frac{e^{\cos^{-1}(x)}dx}{\sqrt{1-x^2}}, \int \frac{(\sin^{-1}(x))^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \\ & \int \frac{dx}{tg^{-1}(x)(1+x^2)}, \int \frac{e^x \sin^{-1}(e^x)}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx \end{aligned}$$

۱۱. مقادیر زیر را حساب کنید.

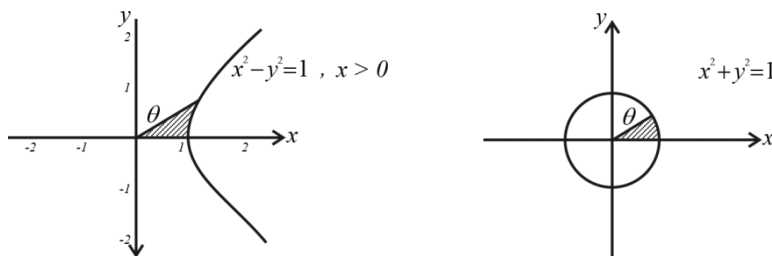
$$\begin{aligned} & tg\left(\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right), \cot\left(\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right), \cos\left(tg^{-1}\left(-\frac{3}{2}\right)\right) \\ & tg\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)\right), tg\left(\cos^{-1}\left(\frac{-1}{4}\right)\right), tg(\sin^{-1}(x)) \end{aligned}$$

توابع هذلولوی یا هایپربولیک و معکوس آنها

اگر دو تابع $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ و $g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ را با دامنه R در نظر بگیریم،

واضح است که $f^2(x) - g^2(x) = 1$ برای هر $x \in R$ و با دادن مقادیر متفاوت به متغیر x یک جفت عدد یعنی $(f(x), g(x))$ حاصل می‌شود که اگر این دو عدد را به ترتیب به عنوان مولفه اول و مولفه دوم یک زوج مرتب و یا به عبارت ساده‌تر به صورت طول و عرض یک نقطه در صفحه مختصات R^2 در نظر بگیریم، از به هم پیوستن این نقاط شاخه راست هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ ایجاد می‌شود.

حال اگر در یک دستگاه مختصات دیگر دایره واحد $x^2 + y^2 = 1$ را رسم کنیم. و در ربع اول دایره قطاعی با زاویه θ و در کنار هذلولی نیز در ربع اول زاویه θ را جدا کنیم می‌توان ثابت کرد که مساحت قطاع و مساحت ناحیه هاشورزده در هر دو شکل زیر برابر است.



به همین دلیل انتهای کمان θ روی دایره یعنی نقطه M و انتهای کمان θ روی هذلولی یعنی نقطه M' را متناظر یکدیگر قرار می‌دهیم، یعنی نقطه M به مختصات $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ نظیر نقطه M' به مختصات $(f(\theta), g(\theta))$ قرار می‌گیرد و از این رو می‌توان $f(\theta)$ را مقابل $\cos(\theta)$ ، کسینوس هذلولوی θ و یا کسینوس هایپربولیک θ و $g(\theta)$ را مقابل $\sin(\theta)$ ، سینوس هذلولوی θ و یا سینوس هایپربولیک θ نامید و سپس به‌طور مشابه مقابل سایر نسبت‌های مثلثاتی، نسبت‌های هذلولوی نظیر دیگر را هم تعریف کرد. در این قسمت دامنه و برد واتحادهای هذلولوی و همچنین مشتق و نمودار این توابع و معکوس توابع هذلولوی (هایپربولیک) مطرح می‌شود.

تعریف: توابع هذلولوی یا هایپربولیک

برای هر $\theta \in R$ عدد $\frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}$ را کسینوس هایپربولیک یا کسینوس هذلولوی θ می‌نامیم و با نماد $\cosh(\theta)$ نشان می‌دهیم و عدد $\frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2}$ را سینوس هذلولوی یا سینوس هایپربولیک θ می‌نامیم و با نماد $\sinh(\theta)$ آن را نشان می‌دهیم.

$$\theta \text{ تانژانت هذلولوی} = \tanh(\theta) = \frac{\sinh(\theta)}{\cosh(\theta)} = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{e^\theta + e^{-\theta}}$$

$$\theta \text{ کتانژانت هذلولوی} = \coth(\theta) = \frac{\cosh(\theta)}{\sinh(\theta)} = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{e^\theta - e^{-\theta}}$$

$$\theta \text{ سکانت هذلولوی} = \operatorname{sech}(\theta) = \frac{1}{\cosh(\theta)} = \frac{2}{e^\theta + e^{-\theta}}$$

$$\theta \text{ کسکانت هذلولوی} = \operatorname{csch}(\theta) = \frac{1}{\sinh(\theta)} = \frac{2}{e^\theta - e^{-\theta}}$$

$$D_{\sinh} = D_{\cosh} = D_{\tanh} = D_{\operatorname{sech}} = R, \quad D_{\coth} = D_{\operatorname{csch}} = R - \{0\}$$

مثال: دامنه تابع $y = \coth(x)$ را تعیین کنید.

حل:

$$D_y = \{x \in R \mid e^x - e^{-x} \neq 0\}$$

$$e^x - e^{-x} = 0 \Rightarrow e^x = e^{-x} \Rightarrow \ln(e^x) = \ln(e^{-x})$$

$$\Rightarrow x = -x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow D_y = R - \{0\}$$

مثال: مطلوب است مقادیر زیر:

$$\tanh\left(\frac{1}{2}\ln(x)\right) = ?$$

$$\tanh\left(\frac{1}{2}\ln(x)\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln(x)} - e^{-\frac{1}{2}\ln(x)}}{e^{\frac{1}{2}\ln(x)} + e^{-\frac{1}{2}\ln(x)}}$$

$$e^{\frac{1}{2}\ln(x)} = e^{\ln(\sqrt{x})} = \sqrt{x}, \quad e^{-\frac{1}{2}\ln(x)} = e^{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \tanh\left(\frac{1}{2}\ln(x)\right) = \frac{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{x-1}{x+1}$$

$$(\cosh(x) + \sinh(x))^2 = ?$$

$$(\sinh(x) + \cosh(x))^2 = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = (e^x)^2 = e^{2x}$$

$$\ln(\cosh(x) + \sinh(x)) + \ln(\cosh(x) - \sinh(x)) = ?$$

$$\ln(\cosh(x) + \sinh(x)) + \ln(\cosh(x) - \sinh(x)) =$$

$$\ln[(\cosh(x) + \sinh(x))(\cosh(x) - \sinh(x))] =$$

$$\ln(\cosh^2(x) - \sinh^2(x)) = \ln(1) = 0$$

$$\int_0^{\ln(2)} 4e^x \sinh(x) dx =$$

$$\int_0^{\ln(2)} 4e^x \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) dx = 2 \int_0^{\ln(2)} (e^{2x} - 1) dx = 2 \left(\frac{e^{2x}}{2} - x\right) \Big|_0^{\ln(2)} =$$

$$2 \left[\left(\frac{e^{2\ln(2)}}{2} - \ln(2)\right) - \left(\frac{1}{2} - 0\right) \right] = e^{\ln(2^2)} - 2\ln(2) - 1 =$$

$$2^2 - \ln(4) - 1 = 3 - \ln(4)$$

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$\sinh(x) = 2e^{-x} + 1$$

حل:

$$\sinh(x) = 2e^{-x} + 1 \Rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 2e^{-x} + 1$$

$$\Rightarrow e^x - e^{-x} = 4e^{-x} + 2 \Rightarrow e^x - 5e^{-x} - 2 = 0$$

اگر قرار دهیم $e^x = t$ داریم:

$$t - 5 \times \frac{1}{t} - 2 = 0 \Rightarrow \frac{t^2 - 5 - 2t}{t} = 0 \Rightarrow t^2 - 2t - 5 = 0 \Rightarrow t = 1 \pm \sqrt{6}$$

چون $t = e^x > 0$ پس $t = 1 + \sqrt{6}$ قابل قبول است. بنابراین

$$e^x = 1 + \sqrt{6} \Rightarrow \ln(e^x) = \ln(1 + \sqrt{6}) \Rightarrow x = \ln(1 + \sqrt{6})$$

اتحادهای هذلولوی

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1 \quad (۱)$$

مثال: اگر $\sinh(\theta) = 2$ باشد، سایر نسبت‌های هذلولوی θ را تعیین کنید.

حل:

$$\cosh^2(\theta) - \sinh^2(\theta) = 1 \Rightarrow \cosh^2(\theta) - 2^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\cosh^2(\theta) = 5 \Rightarrow \cosh(\theta) = \pm\sqrt{5}$$

چون $\cosh(\theta) = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} > 0$ پس $\cosh(\theta) = \sqrt{5}$ بنابراین

$$\operatorname{tg} h(\theta) = \frac{\sinh(\theta)}{\cosh(\theta)} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{cot} g h(\theta) = \frac{1}{\operatorname{tg} h(\theta)} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\sec h(\theta) = \frac{1}{\cosh(\theta)} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\operatorname{csc} h(\theta) = \frac{1}{\sinh(\theta)} = \frac{1}{2}$$

مثال:

$\cosh(\theta) = \frac{17}{15}$ می‌باشد، سایر نسبت‌های هذلولوی θ را تعیین کنید.

حل:

$$\cosh^2(\theta) - \sinh^2(\theta) = 1 \Rightarrow \left(\frac{17}{15}\right)^2 - \sinh^2(\theta) = 1 \Rightarrow$$

$$\sinh^2(\theta) = \frac{289}{225} - 1 = \frac{64}{225} \Rightarrow \sinh(\theta) = \pm \frac{8}{15}$$

چون هر دو مقدار بالا برای $\sinh$ قابل قبول است پس دو دسته جواب داریم:

حالت اول: $\sinh(\theta) = \frac{8}{15}$

$$\operatorname{tg} h(\theta) = \frac{\sinh(\theta)}{\cosh(\theta)} = \frac{\frac{8}{15}}{\frac{17}{15}} = \frac{8}{17}$$

$$\cot g h(\theta) = \frac{1}{tg h(\theta)} = \frac{17}{8}$$

$$\sec h(\theta) = \frac{1}{\cos h(\theta)} = \frac{15}{17}$$

$$\csc h(\theta) = \frac{1}{\sin h(\theta)} = \frac{15}{8}$$

$$\sin h(\theta) = \frac{-8}{15} \text{ حالت دوم:}$$

$$tg h(\theta) = \frac{\sin h(\theta)}{\cos h(\theta)} = \frac{-\frac{8}{15}}{\frac{17}{15}} = -\frac{8}{17}$$

$$\cot g h(\theta) = \frac{1}{tg h(\theta)} = -\frac{17}{8}$$

$$\sec h(\theta) = \frac{1}{\cos h(\theta)} = \frac{15}{17}$$

$$\csc h(\theta) = \frac{1}{\sin h(\theta)} = -\frac{15}{8}$$

توضیح: با یادآوری این موضوع که در توابع مثلثاتی، پایه اصلی همه اتحادها رابطه $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ می باشد، بطور مشابه در توابع هذلولوی نیز همه اتحادها براساس رابطه $\cos^2 h(\alpha) - \sin^2 h(\alpha) = 1$ دست یافتنی می باشد. به طور مثال با تقسیم اتحاد فوق به ترتیب بر $\cos^2 h(\alpha)$ و $\sin^2 h(\alpha)$ ، سریعاً روابط هذلولوی زیر نتیجه می شود:

$$\frac{\cos h^2(\alpha)}{\cos h^2(\alpha)} - \frac{\sin h^2(\alpha)}{\cos h^2(\alpha)} = \frac{1}{\cos h^2(\alpha)} \equiv 1 - tg h^2(\alpha) = \sec h^2(\alpha)$$

$$\frac{\cos h^2(\alpha)}{\sin h^2(\alpha)} - \frac{\sin h^2(\alpha)}{\sin h^2(\alpha)} = \frac{1}{\sin h^2(\alpha)} \equiv \cot g h^2(\alpha) - 1 = \csc h^2(\alpha)$$

(۲) همچنین به راحتی ثابت می شود،

$$\cos h(-\theta) = \cos h(\theta)$$

$$\sin h(-\theta) = -\sin h(\theta)$$

به عبارتی مشابه توابع مثلثاتی تابع $\sinh$ تابعی فرد و $\cosh$ تابعی زوج است.

(۳)

$$\sinh(x \pm y) = \sinh(x) \cosh(y) \pm \cosh(x) \sinh(y)$$

$$\cosh(x \pm y) = \cosh(x) \cosh(y) \pm \sinh(x) \sinh(y)$$

$$\cosh(2x) = \cosh^2(x) + \sinh^2(x)$$

$$= 2\cosh^2(x) - 1$$

$$= 1 + 2\sinh^2(x)$$

$$\sinh(2x) = 2\sinh(x) \cosh(x)$$

(۴)

$$\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x) \Rightarrow \cosh^2(x) \geq 1 \Rightarrow |\cosh(x)| \geq 1$$

$$\xrightarrow{\cosh > 0} \cosh \geq 1$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} \leq 1$$

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} < \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

$$\Rightarrow \sinh(x) < \cosh(x) \Rightarrow |\tanh(x)| < 1, \quad |\coth(x)| > 1$$

$$\operatorname{csch}(x) = \frac{1}{\sinh(x)} > 0, \quad \operatorname{csch}(x) \neq 0$$

مثال: اگر $\cosh(\alpha) = \frac{3}{4}$ باشد، سایر نسبت‌های هذلولوی α را مشخص کنید.

حل: چون $\cosh \geq 1$ پس چنین α ای وجود ندارد.

مشتق توابع هذلولوی

$$(\sinh(x))' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

$$(\cosh(x))' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$$

$$(\tanh(x))' = \left(\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \right)' = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)} = \operatorname{sech}^2(x)$$

$$(\coth(x))' = \left(\frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \right)' = \frac{\sinh^2(x) - \cosh^2(x)}{\sinh^2(x)} = \frac{-1}{\sinh^2(x)} = -\operatorname{csch}^2(x)$$

$$(\operatorname{sech}(x))' = \left(\frac{1}{\cosh(x)} \right)' = \frac{-\sinh(x)}{\cosh^2(x)} = -\frac{1}{\cosh(x)} \times \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = -\operatorname{sech}(x) \operatorname{tgh}(x)$$

$$(\operatorname{csch}(x))' = \left(\frac{1}{\sinh(x)} \right)' = \frac{-\cosh(x)}{\sinh^2(x)} = -\frac{1}{\sinh(x)} \times \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = -\operatorname{csch}(x) \cot g h(x)$$

$$\Rightarrow \int \sinh(x) dx = \cosh(x) + k, \int \cosh(x) dx = \sinh(x) + k$$

مثال: اگر $y = \operatorname{Ln}(\sinh(x)) + \frac{1}{2} \cosh^2(x)$ ، مطلوب است y' .

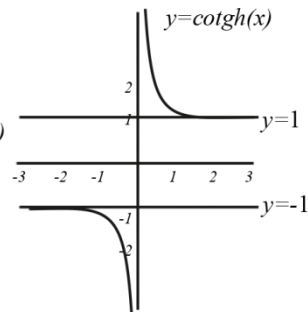
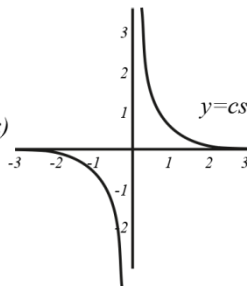
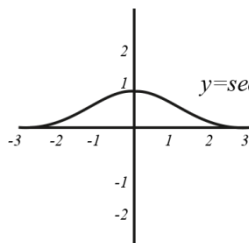
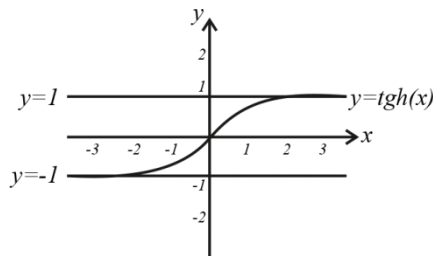
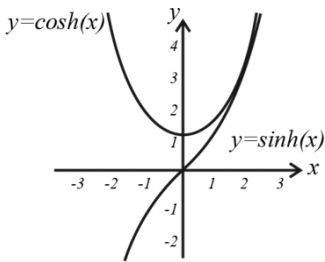
حل:

$$y' = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} + \frac{1}{2} \times 2 \cosh(x) \times \sinh(x)$$

$$= \cosh(x) \left(\frac{1}{\sinh(x)} + \sinh(x) \right)$$

$$= \cosh(x) \left(\frac{1 + \sinh^2(x)}{\sinh(x)} \right) = \cosh(x) \times \frac{\cosh^2(x)}{\sinh(x)} = \frac{\cosh^3(x)}{\sinh(x)}$$

نمودار توابع هذلولوی



توابع هذلولوی معکوس

در این قسمت یک مرور کوتاه و سریع بر توابع هذلولوی معکوس و مشتق آنها خواهیم داشت.

تابع سینوس هذلولوی معکوس

$$R \xrightarrow[\sin^{-1}]{\sinh} R$$

برای یافتن مشتق $\sinh^{-1}$

$$y = \sinh^{-1}(x) \Rightarrow \sinh(y) = x \Rightarrow y' \cosh(y) = 1 \Rightarrow y' = \frac{1}{\cosh(y)}$$

$$\cosh^2(y) - \sinh^2(y) = 1$$

$$\Rightarrow \cosh(y) = \sqrt{1 + \sinh^2(y)} = \sqrt{1 + x^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\Rightarrow (\sinh^{-1}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \sinh^{-1}(x) + k$$

و بطور مشابه برای هر $a > 0$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + k$$

مثال:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3 + 5x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5}x)^2}} = \frac{\sinh^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}x}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{5}} + k$$

تابع کسینوس هذلولوی معکوس

تابع کسینوس هذلولوی تابعی زوج است پس یک به یک نمی‌باشد، بنابراین موقع وارون کردن این تابع، فقط شاخه راست نمودار آن و یا فقط شاخه چپ نمودار آن را در

نظرمی گیریم یعنی فقط برای $x \geq 0$ یا فقط برای $x \leq 0$.

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{\cosh} & & \xrightarrow{\cosh} \\ [0, +\infty) & \text{یا } (-\infty, 0] & [1, +\infty) \\ \xleftarrow{\cosh^{-1}} & & \xleftarrow{\cosh^{-1}} \end{array}$$

اگر قرار دهیم:

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{\cosh} & & \\ [0, +\infty) & & [1, +\infty) \\ \xleftarrow{\cosh^{-1}} & & \end{array}$$

$$y = \cosh^{-1}(x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} : x > 1$$

و بطور مشابه برای سایر توابع هذلولوی معکوس،

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{\operatorname{tg} h} & & \\ R & & (-1, 1) \\ \xleftarrow{\operatorname{tg} h^{-1}} & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{tg} h^{-1}(x))' &= \frac{1}{1-x^2} \\ |x| &< 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{\cot g h} & & \\ R - \{0\} & & (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \\ \xleftarrow{\cot g h^{-1}} & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} (\cot g h^{-1}(x))' &= \frac{1}{1-x^2} \\ |x| &> 1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{\operatorname{sech}} & & \\ [0, +\infty) & & (0, 1] \\ \xleftarrow{\operatorname{sech}^{-1}} & & \end{array}$$

$$(\operatorname{sech}^{-1}(x))' = \frac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{\operatorname{csch}} & & \\ R - \{0\} & & R - \{0\} \\ \xleftarrow{\operatorname{csch}^{-1}} & & \end{array}$$

$$(\operatorname{csch}^{-1}(x))' = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$

بنابراین به کمک مشتق‌های توابع هذلولوی معکوس، فرمول‌های انتگرال‌گیری زیر را داریم:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1}(x) + k$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + k$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \cosh^{-1}(x) + k : \quad x > 1$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + k : \quad x > a > 0$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} \tanh^{-1}(x) + k : & |x| < 1 \\ \coth^{-1}(x) + k : & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + k : & |x| < a \\ \frac{1}{a} \coth^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + k : & |x| > a > 0 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\operatorname{sech}^{-1}(x) + k : \quad 0 < x < 1$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{-1}{a} \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + k : \quad 0 < x < a$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \begin{cases} -\operatorname{csc}^{-1}(x) + k : & x > 0 \\ +\operatorname{csc}^{-1}(x) + k : & x < 0 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = \begin{cases} \frac{-1}{a} \operatorname{csc}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + k : & x > 0 \\ \frac{1}{a} \operatorname{csc}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + k : & x < 0 \end{cases} \quad a > 0$$

$$= \frac{-1}{a} \operatorname{csc}^{-1}\frac{|x|}{a} + k : \quad a > 0$$

مثال:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sinh^{-1}(x)}{x^3} \frac{0}{0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{3x^2} \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - (1+x^2)^{-1/2})'}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - \frac{-1}{2} \times 2x \times (1+x^2)^{-3/2}}{6x} \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6} \times \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

اتحادهای توابع هذلولوی معکوس

$$\sec h^{-1}(x) = \cos h^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\csc h^{-1}(x) = \sin h^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\cot g h^{-1}(x) = tgh^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$$

نکته: از آنجا که توابع هذلولوی به کمک تابع نمایی $y = e^x$ بیان می‌شود انتظار می‌رود که معکوس این توابع نیز توسط معکوس تابع نمایی یعنی تابع لگاریتم طبیعی قابل بیان باشد.

مثال: تابع $y = \sinh^{-1}(x)$ را به کمک تابع لگاریتم طبیعی ($\ln$) بیان کنید.

حل:

$$y = \sinh^{-1}(x) \Rightarrow x = \sinh(y) \Rightarrow \frac{e^y - e^{-y}}{2} = x$$

اگر قرار دهیم $e^y = t$

$$\Rightarrow \frac{t - \frac{1}{t}}{2} = x \Rightarrow \frac{t^2 - 1}{2t} = x \Rightarrow t^2 - 2tx - 1 = 0$$

معادله فوق را بر حسب x برای مجهول t حل می‌کنیم،

$$t = x \pm \sqrt{x^2 + 1} = \begin{cases} x + \sqrt{1 + x^2} > 0 \\ x - \sqrt{1 + x^2} < 0 \end{cases}$$

چون $t = e^y > 0$ پس

$$\begin{aligned} t = x + \sqrt{1 + x^2} &\Rightarrow e^y = x + \sqrt{1 + x^2} \\ &\Rightarrow \ln(e^y) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \\ &\Rightarrow y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \\ &\Rightarrow \sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \end{aligned}$$

بطور مشابه، معادل سایر توابع هذلولوی معکوس را میتوان بر حسب تابع لگاریتم طبیعی یعنی $\ln$ محاسبه کرد.

فرمول‌های توابع هذلولوی معکوس بر حسب تابع لگاریتم طبیعی عبارتند از،

- (1) $\sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) : \quad \forall x$
- (2) $\cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) : \quad x \geq 1$
- (3) $\operatorname{tg} h^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) : \quad |x| < 1$
- (4) $\cot g h^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) : \quad |x| > 1$
- (5) $\operatorname{sech}^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) : \quad 0 < x \leq 1$
- (6) $\operatorname{csc} h^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{|x|}\right) : \quad x \neq 0$

مثال: مطلوب است $\operatorname{tg} h^{-1}(1/2)$

حل:

$$\operatorname{tg} h^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} h^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+1/2}{1-1/2}\right) = \frac{1}{2} \ln(3) = \ln(\sqrt{3})$$

سرعت رشد

تعریف: سرعت رشد

اگر توابع f و g بر بازه $(a, +\infty)$ ، توابعی مثبت باشند، به‌طوریکه

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

تعریف می‌کنیم:

الف: اگر $\ell = 0$ باشد، می‌گوئیم سرعت رشد f کمتر از سرعت رشد g است.

ب: اگر $\ell = +\infty$ باشد، می‌گوئیم سرعت رشد f بیشتر از سرعت رشد g است.

ج: اگر ℓ یک عدد متناهی مثبت باشد می‌گوئیم سرعت رشد f و g یکسان است.

مثال: سرعت رشد توابع زیر را باهم مقایسه کنید.

$$y_1 = 2^x, \quad y_2 = \ln(x), \quad y_3 = e^x, \quad y_4 = x^2$$

$$y_5 = \sqrt{x}, \quad y_6 = 3^x, \quad y_7 = \sinh(x)$$

حل:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y_3}{y_1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{2}\right)^x = +\infty$$

سرعت رشد y_3 بیشتر از y_1 است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y_6}{y_3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{e}\right)^x = +\infty \Rightarrow$$

سرعت رشد y_6 بیشتر از y_3 است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y_4}{y_5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{x} = +\infty \Rightarrow$$

سرعت رشد y_4 بیشتر از y_5 است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y_2}{y_5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow$$

سرعت رشد y_2 کمتر از y_5 است.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y_1}{y_4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^x}{x^2} = +\infty$$

سرعت رشد y_1 بیشتر از y_4 است.

پس تا این مرحله بر حسب سرعت رشد داریم:

$$y_2 < y_5 < y_4 < y_1 < y_3 < y_6$$

همچنین،

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y_7}{y_3} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{2e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} - 1}{2e^{2x}} \cdot \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2e^{2x}}{2 \times 2e^{2x}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

یعنی سرعت رشد y_7 و y_3 یکسان است.

اکنون که به این مرحله رسیدیم، یعنی ارائه توابع متعالی و خواص آنها، یک لیست کامل از فرمول‌های انتگرال‌گیری رایج برای حل انتگرال‌های مربوط به این درس را عنوان می‌کنیم و با تذکر این نکته که دانشجویان قبل از حل هر انتگرال سعی در به خاطر سپردن این فرمول‌ها و همچنین یادگیری خواص تابع‌های متعالی و قضایای انتگرال معین و نامعین داشته باشند، این فصل را به پایان می‌بریم.

فرمول‌های پایه انتگرال‌گیری

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + k$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + k$$

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \operatorname{Ln} |\sec(x)| + k$$

$$\int \cot g(x) dx = \operatorname{Ln} |\sin(x)| + k$$

$$\int \sec(x) dx = \operatorname{Ln} |\sec(x) + \operatorname{tg}(x)| + k$$

$$\begin{aligned} \int \csc(x) dx &= \operatorname{Ln} |\csc(x) - \cot g(x)| + k \\ &= -\operatorname{Ln} |\csc(x) + \cot g(x)| + k \end{aligned}$$

$$\int \sec^2(x) dx = \operatorname{tg}(x) + k$$

$$\int \csc^2(x) dx = -\cot g(x) + k$$

$$\int \sec(x) \operatorname{tg}(x) dx = \sec(x) + k$$

$$\int \csc(x) \cot g(x) dx = -\csc(x) + k$$

$$\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + k$$

$$\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + k$$

$$\int \lambda dx = \lambda x + k \quad (\lambda: \text{عدد ثابت})$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k, \quad n+1 \neq 0 \quad \text{به شرط}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \operatorname{Ln} |x| + k \quad : x \neq 0$$

$$\int e^x dx = e^x + k$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + k \quad , \quad a > 0, a \neq 1 \quad \text{به شرط}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}(x) + k$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + k$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1}(x) + k$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + k$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \sec^{-1}(x) + k : x > 1 \\ -\sec^{-1}(x) + k : x < -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \begin{cases} \frac{1}{a} \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + k : x > a > 0 \\ -\frac{1}{a} \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + k : x < -a < 0 \end{cases}$$

از آنجا که توابع مثلثاتی نسبت به توابع هذلولوی، برای ذهن خواننده، معمولاً آشناتر است اغلب به خاطر سپردن فرمول‌های انتگرال‌گیری زیر بطور اختیاری به خوانندگان واگذار می‌شود. علاوه بر آن همچنان که در فصل بعد (قسمت روش‌های انتگرال‌گیری) خواهیم دید همه انتگرال‌های زیر به کمک روش تغییر متغیر مثلثاتی قابل حل می‌باشند و بخاطر سپردن آنها امری ضروری نیست.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sinh^{-1}(x) + k$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + k \quad : a > 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \cosh^{-1}(x) + k \quad : x > 1$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + k \quad : x > a > 0$$

$$\int \frac{dx}{1-x^2} = \begin{cases} \tanh^{-1}(x) + k & : |x| < 1 \\ \coth^{-1}(x) + k & : |x| > 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + k & : |x| < a \quad a < 0 \\ \frac{1}{a} \coth^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + k & : |x| > a > 0 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\operatorname{sech}^{-1}(x) + k \quad : 0 < x < 1$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{-1}{a} \operatorname{sech}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + k \quad : 0 < x < a$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \begin{cases} -\operatorname{csc}^{-1}(x) + k & : x > 0 \\ \operatorname{csc}^{-1}(x) + k & : x < 0 \end{cases}$$

$$= -\operatorname{csc}^{-1}(|x|) + k$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = \begin{cases} -\frac{1}{a} \operatorname{csc}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + k & : x \geq a > 0 \\ \frac{1}{a} \operatorname{csc}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + k & : x \leq -a < 0 \\ = \frac{-1}{a} \operatorname{csc}^{-1}\left(\frac{|x|}{a}\right) + k & : |x| \geq a \end{cases}$$

تمرین

۱. عبارت‌های زیر را بر حسب تابع نمایی بنویسید و سپس تا جای ممکن ساده کنید.
 $\sinh(2\ln(x))$, $\cosh(2\ln(x))$, $2\cosh(\ln(x))$
 $\cosh(3x) - \sinh(3x)$, $(\sinh(x) + \cosh(x))^4$

۲. مقادیر زیر را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tanh(x) , \lim_{x \rightarrow 0^+} \coth(x)$$

$$\int_{-\ln(4)}^{-\ln(2)} 2e^x \cosh(x) dx , \int_0^{\ln(10)} 4 \sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

۳. معادله زیر را حل کنید.

$$\cosh(x) = 2e^{-x} + 1$$

۴. اگر $\sinh(x) = \frac{-3}{4}$ باشد، سایر نسبت‌های هذلولوی x را تعیین کنید.

۵. مطلوب است مقادیر زیر، در صورت وجود:

$$\sqrt{1 + \sinh^2(x)} , \cos(\cosh^{-1}(x)) , \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sinh(x))^{\operatorname{csch}(x)}$$

۶. از توابع زیر مشتق بگیرید.

$$y = 2\sqrt{x} \tanh(\sqrt{x})$$

$$y = \ln(\sinh(x)) - \frac{1}{2} \coth^2(x)$$

$$y = \coth(\tanh(x)) - \tanh(\coth(x))$$

$$y = \sinh(5x) \cosh\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$y = \coth^{-1}(\cosh(x)) + \sinh(\sin(6x))$$

$$y = \frac{e^{\sinh(x)}}{\sinh(x) - \cosh(x)}$$

$$y = \sinh^2(x^3) + \cosh^3(x^2)$$

$$y = \sinh\left(\frac{x}{2}\right) + \cosh\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$y = \ln(\cosh(x))$$

$$y = 2\sqrt{\cosh(x) - 1}$$

$$y = \sqrt{1 + \sinh^2(4x)}$$

$$y = \sinh^{-1}(\tanh(x))$$

$$y = e^x (\cosh(x) + \sinh(x))$$

۷. طول منحنی‌های زیر را بر بازه‌های داده شده تعیین کنید.

الف: منحنی $y = \cosh(x)$ بر بازه $[0, 1]$

ب: منحنی $x = \int_0^y \sinh(t) dt$ بر بازه $y \in [0, 2]$

۸. انتگرال‌های زیر را حل کنید.

$$\int \sinh\left(\frac{x}{5}\right) dx, \int 4 \cosh(3x - \ln(2)) dx, \int_{\ln(2)}^{\ln(4)} \cot gh(x) dx$$

$$\int_1^2 \frac{\cosh(\ln(x))}{x} dx, \int_0^{\ln(10)} 4 \sinh^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

۹. به کمک فرمول‌های مشتق توابع هذلولوی معکوس، موارد زیر را حساب کنید.

$$\int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt{3+4x^2}}, (\tanh^{-1}(\cos(2x)))'$$

۱۰. مطلوب است

$$\sinh^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right), \sinh^{-1}\left(\frac{-5}{12}\right), \tanh^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right), \cot gh^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)$$

۱۱. توابع زیر را از نظر سرعت رشد باهم مقایسه کنید.

$$y_1 = \cosh(x), y_2 = \sinh(x), y_3 = x, y_4 = e^x, y_5 = \ln(x)$$